

PROF. GIULIO LA VOLPE

STUDI SULLA TEORIA
DELL' EQUILIBRIO ECONOMICO
DINAMICO GENERALE



CASA EDITRICE DOTT. EUGENIO JOVENE
NAPOLI - 1936-XIV

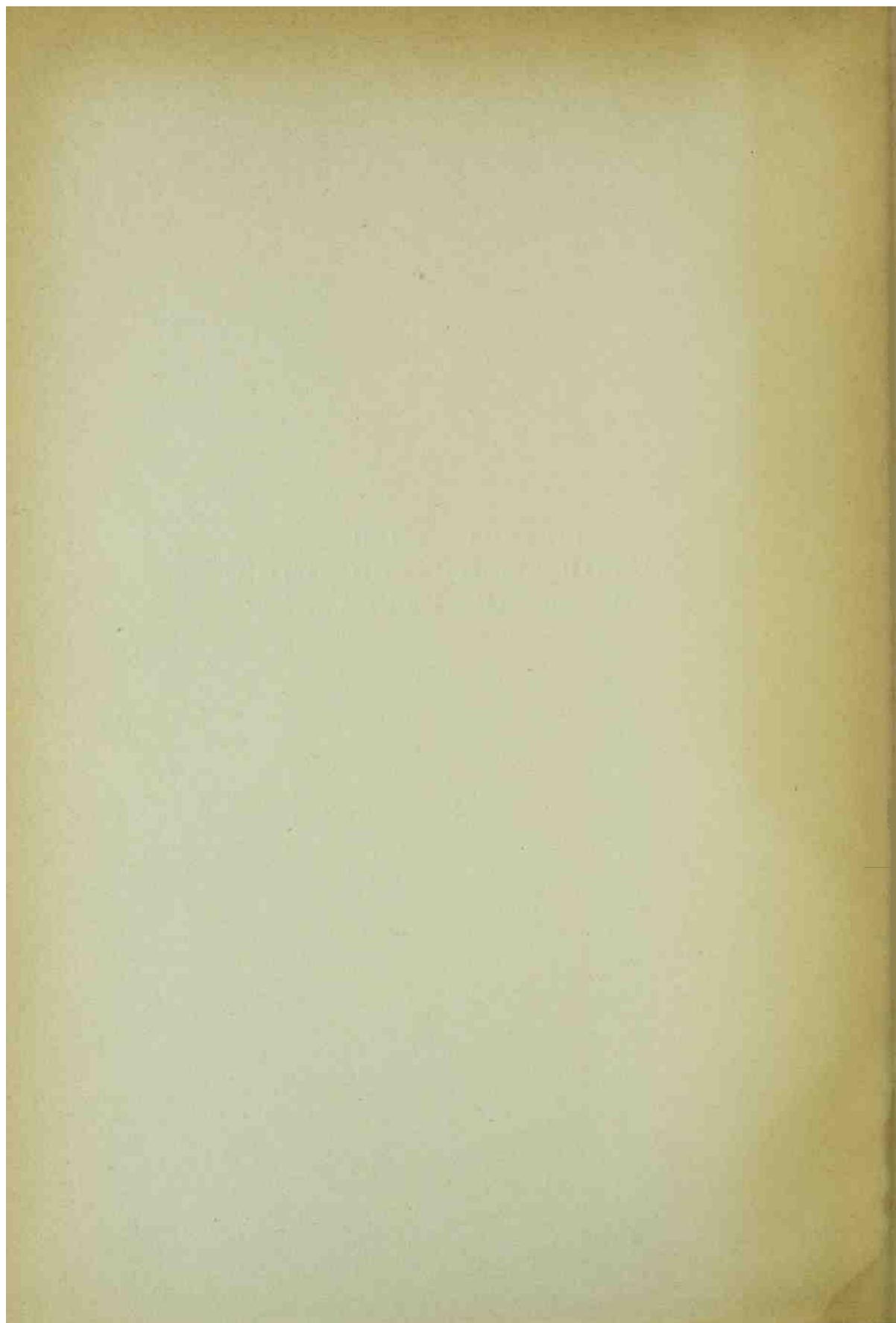
LABORATORIO DI
ECONOMIA POLITICA
S. COGNETTI DE MARTINI

lascito

JANNACCONE

86

STUDI SULLA TEORIA
DELL'EQUILIBRIO ECONOMICO
DINAMICO GENERALE



LASC. J. 86

PROF. GIULIO LA VOLPE

PUV 0264813

STUDI SULLA TEORIA
DELL' EQUILIBRIO ECONOMICO
DINAMICO GENERALE



NAPOLI
CASA EDITRICE DOTT. EUGENIO JOVENE
Via Mezzocannone, 109
1936 - XIV

N.ro INVENTARIO PRE 16303

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Estratto dagli Annali della Facoltà di Giurisprudenza dell'Università di Camerino
Volume XI — 1937 - XV

Stampato in Italia

Stab. Tip. BELLAVISTA - Corso Diaz, 86 - Portici

28 agosto 1936 - XIV

PREFAZIONE

Il Prof. Giulio La Volpe, autore del presente studio, è un valoroso Insegnante di Ragioneria presso l'Istituto Tecnico di Camerino. Qui ebbi occasione di conoscerlo. Ottenuta quest'anno la nomina ad assistente alla Cattedra da me tenuta di « Diritto Finanziario e Scienza delle Finanze » nella Università Camerte, ho potuto apprezzare da vicino le doti intellettuali e morali del giovane studioso che ha affrontato, con serietà di preparazione e volontà di riuscire, l'esame dei problemi fondamentali dell'equilibrio dinamico. In questa pubblicazione che fa parte del volume XI degli « Annali » della Facoltà di Giurisprudenza, il La Volpe espone ampiamente concezioni scientifiche personali che ho ritenuto interessante far conoscere agli studiosi dell'Economica e, oso sperare, saranno apprezzati anche dagli studiosi della vita economica i quali amano esprimersi con altri metodi di indagine di quelli usati nel presente scritto.

La teorica dell'equilibrio economico, mentre è studiata ed approfondita in tutto il mondo, con crescente interesse, è avversata da pochi studiosi in Italia con un senso di unilateralità e di esclusivismo che appare veramente eccessivo, senza vantaggio nè politico, nè scientifico. Per fortuna, valorissimi cultori tengono alta la tradizione paretiana, naturalmente superandola in armonia con i nuovi fatti maturatisi in questi ultimi anni, fatti che, com'è ormai riconosciuto dai più, hanno alterato profondamente la struttura del sistema economico, fondato sulla libera concorrenza e sulla libertà di intrapresa e già incrinato dal progressivo interventzionismo statale e dalla affermazione dei grandi

complessi economici, i quali, realizzatisi in regime di libertà, hanno progressivamente paralizzata l'opera feconda della concorrenza, mentre, d'altra parte, essendo il portato di esigenze tecniche ed economiche, non si potevano ostacolare nella loro affermazione e nel loro sviluppo, dimostratosi necessario per fini politici e militari.

Ora, la teoria dell'equilibrio economico non rappresenta nè più nè meno che un metodo di rappresentazione del mondo economico, il quale metodo non esclude la politicità della Economia, ma anzi la presuppone nel concetto di mutua dipendenza.

Se non che, in buona o mala fede, la teoria dell'equilibrio economico è accusata di ricorrere ad una terminologia meccanica. Gravissimo errore, questo, da parte dei teorici dell'equilibrio i quali non si accorgono che hanno da trattare con l'uomo, in carne ed ossa, ma dotato di volontà e di pensiero. Accusa puerile, in quanto tale meccanica « non è che un modo di esprimersi: le forze di cui parla hanno la natura della sua spiritualità » ¹⁾.

E poi, perchè precludere agli studiosi la possibilità di analizzare e rappresentare la realtà con il metodo che a loro più piace, se è vero che tutti i metodi sono buoni per procedere nell'indagine scientifica? Perchè imporre un esclusivismo metodologico nella ricerca del vero? Ed è poi insindacabile e corretto il metodo che si vuole imporre? Esiste forse anche interferenza tra politica e metodo di indagine scientifica? L'essenziale è, a mio modo di vedere, che si tenga ben presente la politicità dell'Economia nelle conclusioni generali: politicità e non eticità nell'economia, eticità nella politica. È chiaro?

Taluno vede rosso quando si esaltano i nostri vecchi economisti i quali hanno imposto nel mondo un primato che non si può cancellare con la chiacchierata critica demolitrice, di contenuto più o meno filosofico, ma con una costruzione scientifica altrettanto geniale, per quanto non facile perchè nè i geni si improvvisano, nè la messe dei fatti è tale e gli studi scientifici tanti e così interessanti, da permettere la

¹⁾ Come ha riconosciuto DE' STEFANI, *Garanzie di potenza*. Bologna, Zanichelli, 1936; p. 5.

sintesi geniale e nuova, anche se esistesse il genio capace di esprimerla! Premessa questa necessaria chiarificazione, per evitare che venga interpretato erroneamente il mio pensiero, sottoposto qualche volta ad una critica che vi ha trovato contraddizioni inesistenti e distinzioni da me mai espresse, espongo quelli che a mio parere sono i maggiori pregi del presente scritto del La Volpe.

* * *

a) *La teoria concepisce l'equilibrio come bilancio di forze che si compensano, che devono compensarsi, ad ogni istante, ma non implica, con ciò, che debbano necessariamente verificarsi — come poi non si verificano nella realtà — certe condizioni di stabilità fra cui quelle del cosiddetto equilibrio statico: essa infatti intende rappresentare il moto economico con tutte le sue accidentalità e perturbazioni, quale risulta dalle forze che effettivamente agiscono, senza ipostatizzare arbitrarie condizioni di equilibrio.*

b) *La teoria è un sistema chiuso, il che ha richiesto il ricorso ad ipotesi semplificatrici.*

c) *Lo schema estende al futuro le valutazioni utilitarie dei consumatori; introduce, analizzandoli dettagliatamente, i piani dei produttori; fonda il sistema su concetti marginali (utilità e produttività); considera tre aspetti della vita d'impresa: investimenti, reddito da ripartire e finanziamenti; offre una interessante trattazione dei beni durevoli perpetui (liquidi) e temporanei (vincolati); introduce nella concezione dinamica i concetti della statica, mettendoli in relazione con l'elemento tempo.*

d) *Sono gettate, in questo studio, le prime linee di una teoria matematica dell'equilibrio dinamico fondata sul principio che nel moto storico di un sistema economico le forze, compatibilmente con i vincoli, sono in ogni istante in equilibrio ed è tentata la costruzione di una teoria del movimento economico fondata su uno schema più vicino alla realtà che non siano gli schemi da cui l'autore parte, in quanto tiene conto non soltanto delle forze vive del sistema, ma delle*

forze d'inerzia e delle forze direttrici, pure escludendo di queste ultime, per il momento, le forze di secondo tipo (azione politica).

La conoscenza del sistema aziendale, che è parte viva del suo insegnamento, lo ha posto in condizione di penetrare, da economista, nell'analisi dell'azienda per la maggiore conoscenza della sua struttura tecnica, aiutandolo a spingersi verso la maggiore approssimazione alla realtà, seguendo in ciò le orme di taluni grandi economisti che l'autore mostra di conoscere a sufficienza (Marshall, Wicksell, Keynes, Amoroso, ecc.).

Camerino, Università, Agosto 1936-XIV.

LELLO GANGEMI

INTRODUZIONE

Il mondo economico, come tutta la realtà umana, si muove senza tregua. La legge del suo moto è la successione continua delle configurazioni nelle quali si atteggia nel corso del tempo: configurazioni sempre nuove, che non si ripetono mai. *Esso non tende ad alcun assetto definitivo.* Invece, ad ogni istante, si trova in una posizione di equilibrio: se, a un dato momento, assume una certa configurazione, tra le infinite pensabili, è perchè a quella conduce il giuoco delle forze economiche ed extra-economiche che agiscono in quell'istante entro i limiti di ogni sorta di vincoli.

Pertanto il principio fondamentale su cui deve costruirsi l'Economia dinamica è il seguente:

Nel moto storico d'un sistema economico, le forze, compatibilmente con i vincoli, sono in ogni istante in equilibrio.

Nel presente lavoro espongo le prime linee di una teoria matematica dell'equilibrio dinamico e del moto storico fondata su questo principio.

Di fronte alla estrema complessità del problema, assumo un quadro opportunamente semplificato della realtà.

Ulteriori ricerche dovranno perfezionare i risultati ottenuti, tentare formulazioni più semplici, atte a più efficaci, benchè più sintetiche, rappresentazioni di fatti e fenomeni, arricchire schemi e soluzioni in estensione ed in profondità.

Soltanto allora, elaborata una solida e compiuta teoria dinamica, l'economia matematica sarà in grado di assolvere il compito primo che, a mio avviso, le spetta, quello cioè di fornire un valido strumento di lavoro, atto a dare un vigoroso impulso alla costruzione di una scienza

economica dalle linee sicure e robuste, nonchè a quella investigazione *unitaria* di più vasti e complessi fenomeni, abbraccianti zone sempre più larghe dell'universo economico, verso cui tendono gli sforzi degli economisti ed a cui conferisce sommo interesse il diffondersi ovunque nel mondo, con intensità crescente, di indirizzi di economie pianificate, controllate e corporative. Come è stato ben dimostrato, l'Economia corporativa, in quanto intervento *razionale* dello Stato, non può non aver presente la teoria dell'equilibrio economico ¹⁾, e tanto meno quanto più questa si avvicini alla realtà, allargando le sue basi e ricevendo una formulazione dinamica.

Il presente studio prende le mosse dalla teoria dell'equilibrio del WALRAS e del PARETO, perfezionata dall'AMOROSO e dal DE PIETRI-TONELLI ²⁾, appropriandosene il metodo e le impostazioni più generali, e tenta la costruzione d'una teoria del movimento economico fondata sur un più largo schema della realtà; e ciò tenendo conto, con la guida dell'AMOROSO e del DE STEFANI ³⁾, non soltanto delle *forze operanti pro tempore* — le forze vive del sistema —, insufficienti a spiegare la continuità storica del movimento economico, ma anche delle *forze d'inerzia*, rappresentanti il peso del passato, e delle *forze direttrici* (la speculazione) esprimenti le capacità umane a prevedere ed a

¹⁾ L. GANGEMI, *Politica corporativa e dinamica economica*, Roma, 1934, P. I., § 9.

²⁾ L. WALRAS, *Eléments d'économie politique pure*, Paris-Lausanne 1926; V. PARETO, *Cours d'économie politique*, Lausanne 1896-97; id., *Manuale di economia politica*, Milano 1906; id., *Économie mathématique*, in « Encyclopédie des sciences mathématique », 1911; L. AMOROSO, *Lezioni di economia matematica*, Bologna 1921; id. *Discussione del sistema di equazioni che definiscono l'equilibrio del consumatore*, in « Annali di Economia » 1928; id., *La teoria dell'equilibrio economico*, corso professato alla Facoltà di Scienze Politiche della R. Università di Roma nell'anno accademico 1929-30, Roma; id., *La curva statica di offerta*, in « Giornale degli economisti », 1930; id., *Critica del sistema capitalista*, corso professato alla Facoltà di Scienze Politiche della R. Università di Roma nell'anno accademico 1931-32, Roma; A. DE PIETRI-TONELLI, *Lezioni di scienza economica razionale e sperimentale*, Rovigo 1921; id., *Prospetto dell'economia matematica*, Padova 1930. Ricordo inoltre: A. BORDIN, *Lezioni di Economia politica generale e corporativa: La statica*, Padova 1932-35.

³⁾ A. DE STEFANI e L. AMOROSO, *La logica del sistema corporativo*, in « Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie », 1933; L. AMOROSO, *Economia e politica*, discorso pronunciato per l'inaugurazione dell'anno accademico 1932-33, in « Annuario della R. Università di Roma », 1932-33, Roma.

plasmare gli avvenimenti futuri. Per i necessari limiti del lavoro non considero le forze direttrici del secondo tipo, consistenti nell'« azione politica », mediante le quali « la Politica signoreggia l'Economia ».

Feconde direttive ho potuto trarre dai recenti contributi di dinamica economica, e segnatamente da quelli, notevolissimi, dell'AMOROSO ⁴⁾.

Così ho tentato di costruire una teoria microdinamica dell'equilibrio generale, mostrando come si stabilisca *in ogni istante* l'equilibrio del mercato, quale risultante della condotta dei soggetti economici, consumatori ed imprese, fondata su previsioni e programmi per l'avvenire, e come tale equilibrio si sposti *in modo continuo nel tempo* attraverso il modificarsi dei piani individuali. Questo è il *punctum saliens* della teoria. Se è certo che è arduo prevedere il futuro, che è impossibile evitare gli errori nel proiettare nell'avvenire le tendenze presenti del mercato e facile esagerare in un senso o nell'altro le proprie

⁴⁾ Il primo tentativo d'una formulazione dell'equilibrio generale dinamico è dovuto a: V. PARETO, *Nuove teorie economiche (Appendice)*, in « Giornale degli economisti », 1901, il quale però, in sostanza, non si libera della concezione statica. Fra i contributi dell'AMOROSO ho avuto presenti in ispecial modo: *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica*, in « Nuova collana di economisti », Torino 1932; *La dinamica dei prezzi*, corso professato alla Facoltà di Scienze Politiche della R. Università di Roma nell'anno accademico 1932-33. Roma; *La dinamica dell'impresa*, in « Rivista italiana di statistica, economia e finanza », 1933; *La dinamica della circolazione*, in « Rivista italiana di statistica, economia e finanza », 1934.

Ricorderò ancora: G. C. EVANS, *A simple theory of competition*, in « The American Mathematical Monthly », 1922; id., *The dynamics of monopoly*, in « The American Mathematical Monthly », 1924; H. L. MOORE, *Synthetic Economics*, New York 1929, per la critica del quale si consulti: G. MASCI, *Saggi critici di teoria e metodologia economica*, Catania 1934 e A. BORDIN, *Il significato di alcune moderne teorie matematiche della dinamica economica*, in « Giornale degli economisti », marzo 1935; J. TINBERGEN, *The notion of horizon and expectancy in dynamic economics*, in « Econometrica », 1932; id., *Suggestions on quantitative business cycle theory*, in « Econometrica », 1935; C. F. ROOS, *Dynamic Economics* Bloomington, Indiana 1934; M. KALEKI, *Proba teorji konjunktury*, Varsavia 1933, riassunto in « Revue d'économie politique », 1934. id., *A Macrodynamics Theory of business cycles*, in « Econometrica », 1935; R. FRISCH, *Some problems in Economic Macrodynamics*, Comunicazione al III Congresso di « Econometrica », Leida 1933; id., *Propagation problems and Impulse problems in Dynamics*, in « Economic Essays in honour of G. Cassel », Londra 1933; P. N. ROSENSTEIN RODAN, *The rôle of time in economic theory*, in « Economica » 1934. Un posto notevole, a sè, merita: G. DEL VECCHIO, *Lezioni di economia applicata. P. I. Dinamica economica*, Padova 1930.

valutazioni prospettive, non è meno vero che così tuttavia venga regolata, in ogni istante, l'attività economica.

(Non è qui che bisogna ricercare le cause prime dell'incapacità dimostrata dalle economie private a governare le proprie sorti, rendendo necessario in tutti i paesi l'intervento statale?).

Ritengo fermamente che l'*Economia dinamica dell'avvenire* debba costruirsi necessariamente sul modello dianzi delineato. I fenomeni economici, invero, sono essenzialmente temporali e non possono studiarsi senza fare riferimento al tempo. Ogni problema si scinde allora in due ordine di ricerche. Anzitutto, bisogna mostrare in qual modo, per effetto di quali vincoli e sotto l'azione di quali forze, i fenomeni in oggetto abbiano, ad ogni istante o ad un dato istante, tali o tal'altre manifestazioni, e assumano certe dimensioni. Si studieranno allora le leggi di condotta delle economie elementari del mercato (lavoratori, consumatori, produttori, banchieri, gruppi economici e politici, istituzioni sindacali e corporative), e, nei diversi campi dell'economia, si indagherà come vengano determinate, *all'istante considerato*, quantità esistenti di beni e servizi e quantità suscettibili di scambio, domande ed offerte, individuali parziali e totali, di beni, servizi e finanziamenti ammontare e variazioni di giacenze, scorte ed approvvigionamenti, velocità di circolazione di beni e monete, tassi d'investimento nella produzione di beni non durevoli e di servizi di beni durevoli, grado e velocità di utilizzazione di strumenti ed impianti, riserve bancarie ed offerte di crediti, depositi e rimborsi, ecc. Sono ricerche difficili e complesse, soprattutto per la parte predominante e decisiva che hanno, nella determinazione della realtà di ogni giorno, le previsioni dell'avvenire ed i programmi a scadenza più o meno lontana, in cui sono variamente proiettate le *tendenze* presenti del mercato. È qui, dove si pongono le fondamenta della teoria economica, che osservazione psicologica, statistica e storica, induzione costruttiva e deduzione logica devono essere integrate, coordinate e controllate vicendevolmente, con mano sapiente, nel duro travaglio creativo del pensiero economico scientifico.

Dopo ciò, si potrà affrontare la vera e propria indagine dinamica, e studiare in qual modo di istante in istante, nell'ininterrotto movimento del sistema economico, vengano generati i fenomeni in oggetto, attraverso il sorgere e il cessare di ogni sorta di vincoli, il modificarsi senza tregua delle previsioni e dei programmi per l'avvenire, il continuo divenire, a mo' di valanga, delle forze economiche ereditarie.

Detto altrimenti e più brevemente, il primo ordine di ricerche studia le leggi che regolano ad ogni istante l'equilibrio economico, mentre il secondo ha per oggetto le leggi dei movimenti continui nel tempo dei fattori dell'equilibrio stesso, ossia le leggi del moto storico ⁵⁾.

La presente teoria dà una prima soluzione al problema studiato. Diverse delle sue impostazioni, si noti bene, sono costruzioni provvisorie, semplici espedienti per raggiungere lo scopo. Tuttavia essa può già offrire un valido ausilio per una impostazione dinamica di larga parte della teoria economica.

A molti problemi avrei potuto dare una rappresentazione più generale, talvolta generalissima, facendo tesoro dei più complessi mezzi logici offerti dal calcolo funzionale, ma me ne sono astenuto, affinché la teoria non perdesse in chiarezza ed efficacia, ciò che avrebbe guadagnato in estensione.

La trattazione non si allontana dallo schema classico della libera concorrenza, allo scopo di scansare i più ardui problemi posti dalle infinite forme di concorrenza imperfetta e di monopolio, cui dà un solo fugace cenno (cap. II, sez. VI), nonchè dagli interventi delle organizzazioni politiche, diretti alla realizzazione di piani più o meno frammentari, oppure miranti alla disciplina corporativa dell'intero sistema economico.

⁵⁾ Sul concetto della dinamica economica come teoria dei movimenti continui nel tempo dei fattori e delle quantità dell'equilibrio dinamico, contrapposto a quello, inaccettabile, di fasi di disequilibrio intermedie fra posizioni di equilibrio (PANTALEONI), si veggia: G. MASCI, *Saggi critici di teoria e metodologia economica*, Catania 1934, pagg. 184-190, ed il saggio *Sul concetto di dinamica economica*, in « Atti dell'Istituto Nazionale delle assicurazioni », vol. VIII.

Per evitare equivoci, si sappia che con ciò non intendo in nessun modo disconoscere che la concretezza della vita non si svolge su una linea di libera concorrenza, bensì di concorrenza imperfetta, nè che il cangiamento del *sistema*, reso necessario dall'impotenza delle stesse forze che avrebbero dovuto garantirne il funzionamento ⁶⁾, richiede sviluppi teorici fondati sur una diversa visione della realtà. D'altronde si studia la libera concorrenza come schema euristico e come prima approssimazione alla realtà, tanto difficile a conoscere, specialmente nella sua pienezza dinamica. Inoltre tengo a far notare che la presente teoria può facilmente accogliere la nuova realtà economica: basta introdurre, accanto ai piani singoli di individui ed imprese su cui essa è fondata, i più vasti piani di sindacati industriali, di istituzioni politiche e di organismi corporativi ⁷⁾. Così, prendendo in considerazione le forze direttrici di secondo tipo, consistenti nell'« Azione politica », l'economia dinamica compirà il suo ultimo passo.

In quanto all'uso delle matematiche, non si vuole con ciò affermare una concezione meccanicistica della vita, il che meglio sarà messo in luce nel corso del lavoro (§ 59), ma soltanto fare uso discreto d'un mezzo di espressione che permette di abbreviare e semplificare il ragionamento ⁸⁾.

⁶⁾ A. DE STEFANI e L. AMOROSO, *Lo Stato e la vita economica*, in DE STEFANI, *La resa del liberalismo economico*, Milano 1933; id., *La logica del sistema corporativo*, in « Rivista internazionale di scienze sociali e discipline ausiliarie », Milano 1933; G. MASCI, *Alcuni aspetti odierni dell'organizzazione e delle trasformazioni industriali*, in « Nuova collana di economisti », vol. VII, Torino 1934.

⁷⁾ G. MASCI, cit., pagg. 937-939. Sul carattere unitario, organico, lungimirante e quindi non contingente, del piano dello Stato corporativo: L. AMOROSO, *L'etica dell'economia corporativa*, in « Rivista italiana di statistica, economia e finanza », 1932; A. DE STEFANI, *Assistenza bancaria e Economia programmatica*, in « Eventi economici » Bologna 1934.

⁸⁾ Per tutte queste discussioni si veggano: L. GANGEMI, *Politica corporativa e dinamica economica*, Roma 1934; id., *Politica corporativa e finanza pubblica*, Bologna 1936. Il Gangemi è stato a torto confuso con i difensori del liberismo economico, mentre ha inteso soltanto affermare che, dovendosi studiare il sistema economico anche dal punto di vista della libera concorrenza, come pure del monopolio, non si poteva fare a meno di ricorrere ai classici e post-classici dell'Economia, i quali del resto, come ha ben dimostrato l'A., si prestano anche, specialmente i neo-classici, per l'impostazione dello studio delle economie non liberistiche (COURNOT, JEVONS, MARSHALL, PARETO, BARONE, PIGOU, ecc.).

Nel capitolo primo l'equilibrio dinamico riceve una prima, più semplice, formulazione che può stare a sè; nel secondo sono raccolte diverse estensioni, ciascuna delle quali può considerarsi separatamente dalle altre. Non dò una esauriente esposizione in linguaggio ordinario della teoria, ma ne illustro man mano i tratti salienti, fermandomi nel terzo ed ultimo capitolo a considerazioni ed interpretazioni conclusive. In appendice sono relegate le dimostrazioni matematiche dei risultati conseguiti.

Nella lettura del lavoro è necessario tenere ben presente che sono indicati in grassetto i valori previsti ed in tondo i valori effettivi.

Esprimo al prof. Lello Gangemi la mia più viva riconoscenza per l'incoraggiamento datomi al compimento dei miei studi e per l'ospitalità concessami in questi « Annali ». E ringrazio i proff. Giulio Andreoli e Gianfranco Cimmino della Facoltà di matematica della R. Università di Napoli dei preziosi suggerimenti fornitimi nell'applicazione del calcolo delle variazioni.

CAPITOLO PRIMO

LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO DINAMICO E DEL MOTO STORICO

I. — Schema del sistema economico.

1. I SOGGETTI E I BENI. — Ogni teoria scientifica deve fissare le ipotesi e gli schemi su cui è costruita. Preciso pertanto le condizioni generali di fatto nelle quali si svolge l'attività dell'economia sociale di cui studio, nel presente capitolo, l'equilibrio dinamico.

La collettività è costituita da X individui, i quali, disponendo di mezzi economici, provvedono alla più conveniente soddisfazione dei propri bisogni. Essi possono riservare i propri servizi di lavoro, che per semplicità suppongo di un'unica specie detta genericamente (L), al proprio diretto consumo oppure cederli dietro compenso ad altri individui e ad imprenditori.

Esistono certi beni durevoli (in numero di h), che dirò genericamente (H), variamente distribuiti fra la popolazione e capaci di rendere flussi temporanei o perpetui di servizi: sono, ad esempio, terreni, corsi d'acqua ed ogni altro bene economico naturale, edifici, costruzioni e simili. In un primo tempo, supporrò che tali beni non siano suscettibili, nè di scambio, nè di produzione e che soltanto i loro servizi siano scambiabili, man mano che con il passare del tempo diventano disponibili. Le quantità possedute da ciascun individuo non sono costanti, ma possono variare nel tempo per cause diversissime: perimenti accidentali, esplorazioni e scoperte, logoramento e simili.

L'attività produttrice ha per oggetto certi beni (in numero di m), detti genericamente (M), e si svolge in *imprese*, gestite da singoli individui o da gruppi di individui, le quali si provvedono dei mezzi economici necessari mediante *finanziamenti* diretti da parte dei consumatori-risparmiatori, e ripartiscono i redditi conseguiti fra gli individui partecipanti. Per ogni individuo si deve sempre distinguere l'azienda familiare dall'impresa eventualmente assunta.

I beni (M) sono servizi e materie (beni non durevoli, utilizzabili anche per frazioni infinitesime) e vengono fabbricati mediante l'impiego di lavoro, di servizi dei beni (H) e di quantità degli stessi prodotti (M) risultato di precedente produzione. Non ne esistono giacenze, nè presso i consumatori, nè presso i produttori, perchè i primi li consumano subito dopo l'acquisto, ed i secondi impiegano appena acquistati quelli occorrenti alle lavorazioni e vendono appena finiti quelli prodotti ⁹).

Nel secondo capitolo considererò il caso che i beni (H) siano suscettibili di scambio e quello che le imprese producano anche *strumenti*, ossia beni durevoli temporanei.

I prestiti non hanno scadenza fissa, ma sono *rimborsabili ad ogni momento* a facoltà del mutuatario o del mutuante, ed *il saggio dell'interesse*, non prefissato per un periodo di tempo, *viene negoziato in modo continuo* sul mercato. La restituzione è certa per cui il prestito non presenta alcun rischio. Gli interessi maturati sono liquidati in modo continuo e quelli non riscossi equivalgono a nuova concessione di finanziamenti.

Non esistono giacenze di cassa e, in ogni intervallo infinitesimo di tempo, le entrate ed uscite monetarie di ogni economia, di consumo

⁹ Si suppone cioè, e l'ipotesi verrà mantenuta in tutto il lavoro, che i beni abbiano un coefficiente di utilizzazione pari all'unità. Uno dei possibili sviluppi della presente teoria consiste nel considerare incogniti i coefficienti di utilizzazione dei beni e nel mostrare come vengano determinati nell'equilibrio dinamico. Si veggia in proposito: A. DE STEFANI, *La ricchezza dall'aspetto energetico e le condizioni di realtà nella dinamica dei fenomeni economici*, Padova 1920, ove da tempo è stata richiamata l'attenzione degli studiosi sul grado di efficienza dei beni, aspetto dinamico della ricchezza di fondamentale importanza e di vasta portata.

o di produzione, si eguagliano esattamente. Ciò significa che le somme ricevute dai consumatori, sotto forma di salari, fitti, interessi e finanziamenti, e dai produttori, mediante vendite di prodotti e nuovi finanziamenti, sono spese interamente e immediatamente, dai primi, nell'acquisto di beni e servizi di consumo ed eventualmente nella concessione di finanziamenti; dai secondi, nell'acquisto di mezzi di produzione, nel pagamento di interessi, nella distribuzione di profitti fra i partecipanti ai risultati dell'impresa ed eventualmente nel rimborso dei finanziamenti ricevuti.

Consumatori e produttori sono liberi nelle proprie scelte e nessuno agisce sui prezzi. È l'ipotesi dell'Economia Walrasiana. L'attività economica si svolge in modo continuo.

2. GLI SCAMBI E I PROBLEMI DELL'EQUILIBRIO DINAMICO. — In ogni intervallo infinitesimo di tempo, i consumatori offrono servizi personali e servizi dei beni (H), eccedenti i propri bisogni, oppure ne domandano a scopo di consumo in aggiunta alle quantità possedute; acquistano prodotti (M) a scopo di consumo e riscuotono un interesse o lo pagano, secondo che risultino creditori o debitori per finanziamenti concessi o ricevuti; concedono nuovi prestiti o chiedono rimborsi su quelli già concessi, oppure chiedono nuovi prestiti od offrono rimborsi su quelli già ricevuti, in altri termini offrono o domandano *finanziamenti*; infine, riscuotono le quote loro spettanti dei profitti conseguiti dalle imprese cui partecipano o contribuiscono a colmarne le perdite.

Nello stesso intervallo di tempo, i produttori vendono, non appena finiti, i prodotti ottenuti, conseguendo un profitto o sopportando una perdita rispetto al costo precedentemente sostenuto; acquistano servizi di lavoro e di beni (H) dai consumatori e si scambiano prodotti (M) per proseguire la produzione; ripartiscono i profitti conseguiti fra i consumatori partecipanti oppure ne ricevono i versamenti per colmare le perdite sopportate; pagano infine ai consumatori-risparmiatori gli interessi sui finanziamenti ottenuti e chiedono nuovi

prestati oppure offrono rimborsi: così anch'essi domandano od offrono *finanziamenti*.

Attraverso questi scambi, conformemente al principio fondamentale della dinamica, le singole economie dei consumatori e dei produttori sono, *ad ogni istante*, in equilibrio e si equilibrano fra loro.

Nell'equilibrio dinamico sono da risolversi due ordini di problemi, riguardanti i fenomeni della produzione e dello scambio, l'uno nell'aspetto reale, l'altro nell'aspetto monetario. Il primo consiste:

a) nella determinazione delle quantità dei prodotti (M) terminati di produrre in ogni intervallo infinitesimo di tempo;

b) nella ripartizione di questi beni e dei servizi dei beni (H) e del lavoro (L), disponibili nello stesso intervallo, fra il consumo e l'investimento produttivo;

c) nella ripartizione delle quantità destinate al consumo fra i diversi consumatori e delle quantità destinate alla produzione fra le diverse imprese.

Il secondo ordine di problemi deve determinare:

d) il risparmio o la dissipazione individuale in ogni intervallo infinitesimo di tempo;

e) la ripartizione dell'eccedenza netta, positiva o negativa, del risparmio totale sulla dissipazione totale, fra le imprese, sotto forma di nuovi finanziamenti netti o di rimborsi netti;

f) i prezzi di lavoro, dei servizi dei beni (H) e dei beni (M), nonché il saggio dell'interesse.

Tali problemi ricevono nell'equilibrio simultanea soluzione.

3. I PREZZI PREVISTI. — Consumatori e produttori regolano le loro scelte in base a previsioni sull'andamento futuro dei prezzi. Indico con $p(t, \tau)$, a meno di indici, il prezzo d'un certo bene previsto, da un dato soggetto economico, al tempo t per l'istante $\tau \geq t$. Per $\tau > t$, p è previsione di prezzi futuri; per $\tau = t$, il prezzo previsto deve coincidere con quello presente di mercato $p(t)$, ossia deve essere:

$$p(t, \tau)_{(\tau=t)} = p(t).$$

p è quindi funzione del prezzo presente di mercato; ma dipende anche dalla *tendenza* di questo, ossia da p' . Se, ad un dato istante, vige sul mercato un certo prezzo, i soggetti economici suppongono che questo continui a muoversi, per qualche tempo, secondo la sua tendenza a quell'istante. Talvolta si prevede che il prezzo in rialzo prosegua a rialzare fino ad un massimo, per poi ribassare di un tanto o fermarsi all'altezza raggiunta; viceversa, se i prezzi sono in ribasso, si prevede che proseguano a ribassare fino ad un minimo, per poi rialzare nuovamente o mantenersi costanti a tale livello.

Ma i prezzi di un certo bene, previsti per il futuro a un dato istante, non dipendono soltanto dal suo prezzo di mercato e dalla sua *tendenza* a quel momento, bensì da tutta l'esperienza acquisita in materia da consumatori e imprenditori, e quindi dai prezzi, presenti e passati, del bene considerato e di tutti gli altri che gli sono in qualche modo connessi. Dipende ancora da ogni circostanza, generica o specifica, presente o passata, di qualsiasi natura — economica, meteorologica, sociale, politica — che gli individui giudichino potere influire sull'avvenire. Tuttavia, per semplicità, porrò p funzione, oltre che di τ , soltanto di p , di p' e di t , trascurando dipendenze non indispensabili alla costruzione di una teoria dinamica e di cui si potrà sempre tener conto per iscopi particolari.

Tale dipendenza dal tempo dei prezzi previsti è particolarmente notevole, perchè rappresenta le sempre rinnovate valutazioni, da parte dei soggetti economici, dei movimenti del mercato nel futuro, i timori e le speranze dell'avvenire e l'alternarsi e il confondersi disordinato delle correnti di fiducia e di sfiducia, sotto l'azione di ogni sorta di eventi politici, sociali, meteorologici. È però, si noti bene, una relazione semplice, *primitiva*, non legata alle vicende del passato e perciò non *ereditaria*.

Anche significativa è la dipendenza dalle tendenze (p') dei prezzi esistenti nel momento in cui le previsioni vengono formulate, perchè esprime con quanto buon senso o con quanta esagerazione vengano proiettati nel futuro gli attuali movimenti del mercato.

Le cose dette valgono per i prezzi di ogni bene e servizio e per il saggio dell'interesse. Indicherò con $i(t)$ il tasso effettivo di mercato e con $i(t, \tau)$, a meno di un indice, i tassi previsti. Anche qui deve essere:

$$i(t, \tau) (\tau = t) = i(t).$$

Il prezzo previsto e quello effettivo del bene assunto come numerario sono evidentemente eguali all'unità; per simmetria li indicherò tuttavia come gli altri.

II. — L'equilibrio dinamico dei consumatori.

4. IL PROBLEMA. — Studierò prima l'equilibrio dinamico dei consumatori ¹⁰⁾, poi quello delle imprese.

Il consumatore determina la sua condotta sul mercato, in ogni intervallo infinitesimo di tempo, in base a un calcolo esteso all'avvenire e compiuto allo scopo di conseguire un massimo di soddisfazioni nell'intero corso (previsto) della sua esistenza ¹¹⁾. È una specie di programma d'impiego di tutti i mezzi, attuali e prospettivi, posseduti, il quale determina senz'altro la sua condotta presente, e determinerà anche quella futura, se non varieranno le previsioni e gli altri dati dei suoi calcoli. Altrimenti, non seguirà alcuna condotta prestabilita e rivedrà ad ogni momento le sue scelte.

Il problema del consumatore è dei più complessi. Questi deve far conto dell'andamento dei prezzi e del saggio dell'interesse, quali li

¹⁰⁾ Nello studio del consumatore-risparmiatore ho tenuto conto in particolare dei seguenti lavori: G. MONTEMARTINI, *Il risparmio nell'economia pura*, Milano 1896; J. FISHER, *The rate of interest*, New York 1907, cap. VI, VII e VIII; L. AMOROSO, *Lezioni di economia matematica*, Bologna 1921; U. GOBBI, *Trattato di economia*, vol. I, Milano 1923, pagg. 160-165; U. RICCI, *Lezioni di economia politica*, 1924-25, Roma, pagg. 209-248; id., *Lezioni di economia politica*, 1925-26, Roma, pagg. 98-127; id., *L'offerta del risparmio*, in «Giornale degli economisti», 1926 e *Ancora sull'offerta del risparmio*, in «Giornale degli economisti», 1927; F. P. RAMSEY, *A mathematical theory of saving*, in «Economic Journal», 1928; M. PANTALEONI, *Principi di economia pura*, Milano 1931, P. I, cap. IV, § 6; A. BORDIN, *Lezioni di economia politica generale e corporativa: La statica*, Padova 1932-35.

¹¹⁾ M. PANTALEONI, *Principi di economia pura*, Milano 1931, pag. 117.

prevede al presente. Insieme alla misura del consumo e del risparmio, deve stabilire la parte del proprio patrimonio che intende investire a scopo lucrativo e la parte destinata al mantenimento dei beni durevoli di consumo per i propri bisogni; nonchè, nello stesso tempo, la ripartizione della prima fra investimenti di diversa natura e scadenza, e della seconda fra i diversi beni di consumo; deve determinare la giacenza di cassa per far fronte con regolarità alle spese giornaliere, il lavoro da cedere dietro compenso, la distribuzione della spesa fra i diversi consumi: tutt'una serie di scelte strettamente interdipendenti e da farsi simultaneamente, che presentano rilevanti difficoltà ad un'analisi dalle linee rigorose.

Lo schema assunto mi permette di scansare alcuni di questi problemi, diversi dei quali verranno risolti nel seguente capitolo. Poichè i prodotti (M) sono beni non durevoli e i beni (H) non si possono scambiare, non v'è questione di beni durevoli, nè di ripartizione del patrimonio e del risparmio fra più investimenti; ed unico modo di impiego del risparmio o di dissipazione del patrimonio è l'offerta o la domanda di finanziamenti. Infine ho assunto le condizioni necessarie perchè non esistano giacenze di cassa.

Così semplificato, il problema del consumatore, ad ogni istante, consiste nella scelta della più conveniente ripartizione del patrimonio posseduto a quel momento e dei proventi che conta ritrarne; e ciò allo scopo di conseguire un massimo di soddisfazioni nell'intero corso (previsto) della sua vita.

Tale principio di massimo edonistico determina, infatti, le condizioni dell'equilibrio dinamico del consumatore, ossia *le condizioni che devono sussistere nel programma che questi, ad ogni istante, si propone per l'avvenire.*

5. L'UTILITÀ DEI CONSUMI. — Mi fermo a considerare l'individuo x ed indico con:

$$U_x(t, \tau, C_{0x}, \dots, C_{h+m,x}),_{x=1, \dots, X},$$

il suo *tasso totale d'utilità*, ossia l'utilità totale (per unità di tempo)

che, al tempo t , attribuisce al consumo, da farsi all'istante $\tau \geq t$, delle quantità (per unità di tempo) C_{0x} , di servizi di lavoro proprio ed altrui, C_{1x}, \dots, C_{hx} , di servizi dei beni (H) e $C_{h+1,x}, \dots, C_{h+m,x}$ di materie e servizi (M).

Questa funzione per $\tau > t$ è valutazione di utilità futura; per $\tau = t$ rappresenta l'utilità effettiva del consumo che indico con U_x . È quindi:

$$U_x = U_x(\tau = t).$$

In funzione di t , la U_x rappresenta le valutazioni dell'utilità dei consumi, attuali e prospettivi, nel loro modificarsi nel corso del tempo, e quindi la *dinamica dei gusti e dello spirito di previdenza*.

A un dato momento t' , deve pertanto considerarsi noto il valore che la U_x assume per $t=t'$ e che, in funzione di τ , dà le valutazioni dell'utilità del consumo futuro fatte a quel momento; ma devono suporsi ignoti i valori che essa assume, sempre in funzione di τ , per $t > t'$.

L'utilità complessiva che il consumatore, all'istante t , conta di ottenere nell'intervallo (t, τ) è:

$$U_{tx} = \int_t^{\tau} U_x [t, v, C_{0x}(t, v), \dots, C_{h+m,x}(t, v)] dv.$$

Il *tasso marginale d'utilità*, ossia l'utilità marginale (per unità di bene e di tempo) del consumo di C_{jx} al tempo τ , quale è previsto all'istante t , è:

$$\frac{\partial U_x}{\partial C_{jx}}, \quad j = 0, \dots, h + m.$$

Deve essere:

$$\frac{\partial U_x}{\partial C_{jx}} > 0, \quad \frac{\partial^2 U_x}{\partial C_{jx}^2} < 0^{12)}$$

¹²⁾ L. AMOROSO, *Lezioni di economia matematica*, Bologna 1921, pag. 82.

In funzione di t e di τ , il tasso d'utilità può essere crescente, costante o decrescente, ossia:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} \geq \hat{0}, \quad \frac{\partial U_x}{\partial \tau} \geq 0.$$

Suppongo evidentemente che le soddisfazioni godute in un certo intervallo di tempo siano *indipendenti* dalle soddisfazioni ottenute nel passato e da quelle previste per l'avvenire.

Le circostanze psicologiche che inducono a formulare un tale piano dei consumi, anzichè un tal altro, trovano tutta sintetica espressione nel comportamento del tasso dell'utilità in funzione di τ . Tendono a rendere questa funzione crescente tutti i nuovi bisogni previsti per il futuro; ad es., il desiderio di elevare la propria posizione economica e sociale, il bisogno di metter su casa e l'ingrandirsi della famiglia, i legami di parentela e di amicizia che fanno sentire come propri i bisogni futuri delle persone care, e simili. La previsione di minori bisogni nell'avvenire fa invece decrescere, rispetto a τ , la funzione dell'utilità.

6. FINANZIAMENTI, RISORSE E CONSUMI. — L'individuo considerato, ad ogni istante, risulta creditore o debitore per prestiti concessi o ricevuti. Sia $F_x(t)$ l'importo totale, positivo o negativo, dei suoi finanziamenti attuali, e $F_x(t, \tau)$ l'estensione che, al tempo t , conta dare ai finanziamenti nel futuro (in funzione di τ).

Siano poi $H_{1x}(t, \tau), \dots, H_{hx}(t, \tau)$ le quantità dei beni (H) che, all'istante t , prevede di possedere in avvenire. Gli stessi simboli misurano i servizi forniti da questi beni. Infatti l'*unità di servizio* d'un bene è l'uso d'una sua unità in un'unità di tempo. I servizi (per unità di tempo) dei beni effettivamente posseduti, all'istante t , sono:

$$H_{jx}(t) = H_{jx}(t, \tau)_{(\tau=t)}, \quad j = 1, \dots, h.$$

Tali quantità, l'ho già detto, possono variare nel tempo, ma solo per ragioni estranee allo scambio.

Il lavoro (in tempo), proprio ed altrui, posseduto in un'unità di tempo è maggiore o minore dell'unità, secondo che, per motivi estranei allo scambio, si possa usufruire in una qualche misura dei servizi personali di altri individui oppure si debba spendere a favore di altri una parte della propria giornata. Indico con

$$H_{ox}(t, \tau) \text{ e con } H_{ox}(t) = H_{ox}(t, \tau)_{\tau=t}$$

rispettivamente le quantità previste e quelle effettive del lavoro posseduto.

Ancora, sia $R_x(t, \tau)$ l'importo delle quote di reddito (profitto se positivo, perdita se negativo) che x al tempo t prevede di ottenere nel futuro dalle imprese cui partecipa. Il reddito effettivamente conseguito è:

$$R_x(t) = R_x(t, \tau)_{\tau=t}.$$

R_x potrebbe porsi in funzione dell'intera serie dei redditi conseguiti nel passato, o anche esprimersi mediante un preventivo, fatto dal consumatore stesso, della gestione futura e dei risultati tecnici ed economici di quelle imprese. Per semplicità pongo tale valore in funzione soltanto del momento in cui ha luogo la previsione del reddito conseguito a questo momento e della sua tendenza, scrivendo:

$$R_x(t, \tau, R_x, R'_x).$$

Ad ogni istante, i finanziamenti esistenti, i servizi del lavoro e dei beni (H) posseduti al presente e previsti pel futuro, i profitti conseguiti e quelli attesi danno la misura delle risorse di cui si può disporre per provvedere ai propri consumi attuali e prospettivi.

Tasso di consumo è la quantità, per unità di tempo, d'un bene o servizio, che un individuo consuma ad un certo momento o si propone di consumare in avvenire. I tassi secondo cui x si propone, all'istante t , di consumare, al tempo $\tau \geq t$, i diversi beni e servizi sono, si è visto:

$$C_{jx}(t, \tau), \quad (j = 0, \dots, h + m).$$

Per designare i prezzi e il saggio dell'interesse previsti dai diversi individui mi valgo, al solito, dell'indice x .

Per tutte le suindicate funzioni di t e di τ deve ripetersi quanto fu detto a proposito dell'utilità. Esse, rispetto a t , rappresentano dati e previsioni nel loro modificarsi nel corso del tempo. Quindi per un dato valore t' di t devono considerarsi note le grandezze che assumono, rispetto a τ , rappresentanti le valutazioni del futuro fatte a quel momento; ma devono suppersi ignoti i valori che assumeranno, sempre in funzione di τ , ad un momento $t > t'$, e che rispecchiano dati e previsioni dell'avvenire.

Il saggio dell'interesse e i prezzi di mercato sono:

$$i \text{ e } p_j \quad (j = 0, \dots, h+m).$$

Poichè assumo come numerario il primo dei beni (M) è:

$$p_{h+1} = 1.$$

7. LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO DINAMICO E DEL MOTO STORICO. —

Si posseggono ora tutti gli elementi necessari alla soluzione del problema del consumatore, ad ogni istante t .

In tale problema devono considerarsi noti il saggio dell'interesse e i prezzi in vigore sul mercato a quell'istante, nonchè i profitti conseguiti a quello stesso momento, insieme alle loro tendenze ($p_j, p_j', i, i', R_x, R_x'$). Sono tutte incognite da determinarsi, in un secondo tempo, mediante le equazioni dell'equilibrio generale. Così risultano determinati l'interesse, i profitti ed i prezzi *previsti*.

Sono anche noti i finanziamenti posseduti ed i flussi previsti dei servizi del lavoro e dei beni (H).

Sono questi, insieme alla funzione dell'utilità, i *dati* del problema — alcuni funzioni primitive, altri funzioni ereditarie del tempo — al momento considerato. Le *incognite* sono i tassi dei consumi, attuali e prospettivi, ed i finanziamenti previsti.

Dati e incognite sono legate dal seguente bilancio (previsto):

$$(1) \quad \sum_{j=0}^h p_{jx} (H_{jx} - C_{jx}) + i_x F_x + R_x - \sum_{j=h+1}^{h+m} p_{jx} C_{jx} - F_x' = 0,$$

$\tau = [t, v_x(t)]; x = 1, \dots, X,$

il quale stabilisce l'eguaglianza dell'entrata con la spesa, senza alcuna rimanenza di cassa, ad ogni istante dei programmi individuali estesi all'intera durata prevista dell'esistenza, il cui termine indico con $v_x(t)$.

Secondo che $H_{jx} \leq C_{jx}$, la relativa voce del bilancio indica una entrata per offerta di lavoro o di servizi di beni (H), posseduti in misura superiore al bisogno, oppure una spesa per l'acquisto di nuove quantità di tali servizi da consumare in aggiunta a quelle possedute.

Se F_x e R_x sono negative, le voci relative rappresentano rispettivamente interessi da pagare e perdite da colmare.

L'espressione:

$$\sum_{j=0}^h p_{jx} H_{jx} + i_x F_x + R_x,$$

misura, nel bilancio, il *reddito monetario previsto*, per unità di tempo, ad ogni istante τ del programma ideato al tempo t , pari al valore del lavoro e dei servizi dei beni (H) che a quel momento saranno posseduti, accresciuto o ridotto degli interessi da pagare o da riscuotere e dei dividendi da conseguire o delle perdite da colmare, a quello stesso momento.

La somma:

$$\sum_{j=0}^{h+m} p_{jx} C_{jx},$$

misura il *consumo totale* (in valore) per unità di tempo.

Pertanto la F_x' (l'apice indichi la derivata parziale rispetto a τ) rappresenta, nello stesso tempo, l'incremento positivo o negativo, per unità di tempo, dei finanziamenti, ossia l'*offerta* o la *domanda* di nuovi finanziamenti o di rimborsi, e l'eccedenza, positiva o negativa, per unità di tempo, del reddito monetario sul consumo, ossia il *tasso del risparmio* o della dissipazione.

I tassi dei consumi ed i finanziamenti previsti vanno determinati con la condizione di massimo della somma di soddisfazioni che gli individui si attendono nel corso (previsto) della loro vita, e cioè di:

$$U_{v_x} = \int_t^{v_x} U_x(t, \tau, C_{0x}, \dots, C_{h+m,x}) d\tau.$$

Poichè i finanziamenti presentemente posseduti sono F_x , dato del problema, e poichè si fa conto di spendere tutti i mezzi presenti e futuri nell'intervallo (t, v_x) , deve essere:

$$(2) \quad F_x(t, \tau)_{(\tau=t)} = F_x, \quad F_x(t, \tau)_{(\tau=v_x)} = 0.$$

Bisogna dunque determinare, ad ogni istante t , i valori, nell'intervallo $\tau = (t, v_x)$, delle funzioni $C_{0x}, \dots, C_{h+m,x}$ e F_x , legate dalla (1), che rendono massimo U_{v_x} con le condizioni (2).

È un problema del calcolo delle variazioni. Per mezzo delle equazioni di Eulero si ottengono le seguenti condizioni, cui devono rispondere i tassi dei consumi (v. app. I):

$$(3) \quad \frac{1}{p_{jx}} \frac{\partial U_x}{\partial C_{jx}} = u_x(t) e^{-\int_t^{\tau} i_x(t, \nu) d\nu}$$

$$j = 0, \dots, h+m,$$

$$\tau = (t, v_x),$$

$$x = 1, \dots, X,$$

dove u_x è un'incognita da determinarsi, costante rispetto a τ .

Le (3), insieme alla (1) e alle condizioni (2), risolvono compiutamente il problema. Il numero delle equazioni eguaglia quello delle incognite. Agli $1+h+m$ tassi previsti dei consumi corrispondono altrettante equazioni, le (3); alla funzione dei finanziamenti la (1); le condizioni rimanenti determinano la u_x e la costante d'integrazione della (1).

Tale sistema di equazioni rappresenta le leggi dell'equilibrio dinamico e del moto storico dei consumatori. Esso, infatti, dato t , fornisce *le condizioni che devono sussistere nei programmi che costoro, ad ogni istante, si propongono per l'avvenire*, e, in funzione di t , *descrive il movimento nel tempo delle economie individuali consumatrici, attraverso il succedersi di sempre nuovi programmi economici.*

8. LE LEGGI D'EQUILIBRIO DEI CONSUMI. — Le (3), assegnato t , rappresentano l'equilibrio dei consumi nei programmi individuali. Esse danno la legge di distribuzione della spesa fra i diversi beni, per ciascun momento τ della durata prevista della vita (t, v_x), e, nello stesso tempo, la legge di distribuzione dei consumi nel corso di questo periodo, ossia in funzione di τ . Dirò l'una *prima legge*, l'altra *seconda legge* dell'equilibrio del consumatore.

Il quoziente del tasso marginale d'utilità d'un bene per il suo prezzo previsto — è il primo membro delle (3) — dà l'utilità marginale di quel bene per unità di tempo e di spesa: lo dirò *tasso marginale ponderato d'utilità*.

La prima legge può quindi enunciarsi:

In un intervallo infinitesimo di tempo ($\tau, \tau + d\tau$) la spesa monetaria deve distribuirsi tra i diversi beni in modo da eguagliare fra loro i tassi marginali ponderati d'utilità. È la ben nota legge d'eguaglianza delle utilità marginali ponderate ¹³⁾ messa in relazione con l'elemento tempo.

La seconda legge si enuncia:

La distribuzione di massima soddisfazione del consumo è quella per cui i tassi marginali ponderati d'utilità di tutti i beni — eguali fra loro — risultino decrescenti nel tempo secondo la legge del valore attuale d'una costante, riferito all'istante in cui si procede alle scelte.

$$-\int_t^\tau i_x(t, v) dv$$

Dividiamo la (3) per $e^{-\int_t^\tau i_x(t, v) dv}$. Il primo membro rappresenta allora l'utilità marginale di ciascun bene, per unità di tempo e di valore attuale di spesa, riferito al momento della scelta, e può denominarsi *tasso marginale ponderato attuale d'utilità*. Al secondo membro rimane soltanto la u_x . Quindi la seconda legge può anche enunciarsi:

¹³⁾ L. AMOROSO, *Lezioni di economia matematica*, Bologna 1921, pag. 97 segg.

Condizione di massima soddisfazione nella distribuzione dei consumi nel tempo è l'eguaglianza tra loro dei tassi marginali ponderati attuali d'utilità.

In funzione della u_x , le (3) rappresentano tutt'una serie di possibili posizioni di equilibrio. Quanto più piccola è questa costante — costante in ciascun programma, ma variabile nel rinnovarsi dei programmi nel corso del tempo — tanto più bassi sono i tassi marginali di utilità e quindi tanto più larga è l'estensione prevista dei consumi. La posizione cui può spingersi il consumatore dipende dalla sua situazione economica, i cui elementi sono tutti contenuti nelle (1) e (2).

9. LE FUNZIONI STORICHE. — Ecco determinati i tassi previsti dei consumi e l'importo dei finanziamenti, in cui si riassumono i programmi individuali. Tali programmi determinano senz'altro la condotta dei consumatori, e quindi la loro domanda od offerta sul mercato di beni, servizi e finanziamenti, *nell'intervallo infinitesimo di tempo in cui vengono ideati*. Ma non più oltre. Successivamente, invero, mutate le valutazioni dell'intensità delle soddisfazioni future, modificati il saggio dell'interesse e i prezzi previsti, nonchè le previsioni dei flussi dei servizi del lavoro e dei beni (H) disponibili, variati insomma tutti i dati del loro problema, nuovi programmi concepiranno gli individui e nuove quantità domanderanno ed offriranno sul mercato.

Pertanto, le funzioni storiche dei consumi e dell'offerta o della domanda di finanziamenti (per unità di tempo), da introdursi nelle equazioni dell'equilibrio generale (§ 17) sono:

$$C_{jx} = C_{jx}(t, \tau)_{(\tau=t)}, \quad F_x' = F_x'(t, \tau)_{(\tau=t)},$$

determinate, ad ogni istante, dal programma in quel momento ideato; e quelle della domanda o dell'offerta di servizi di lavoro e di beni (H) e della domanda di beni (M), rispettivamente:

$$H_{jx} - C_{jx} \quad (j = 0, \dots, h), \quad C_{jx} \quad (j = h+1, \dots, h+m).$$

$x = 1, \dots, X.$

Questa è la condotta sul mercato delle economie consumatrici attraverso l'incessante spostarsi delle loro posizioni di equilibrio.

Ai fini dell'equilibrio generale terrò ben presente che le C_{jx} e le F_x , attraverso le complesse soluzioni svolte ed i prezzi e il saggio dell'interesse previsti che vi figurano, risultano funzioni dei prezzi e del saggio d'interesse di mercato p_j e i , e delle loro derivate p_j' e i' .

10. SECONDA FORMA DELLE EQUAZIONI. — Integrando la (1) e determinando la costante d'integrazione con la condizione: $F_x(t, \tau)_{(\tau=t)} = F_x(t)$, si ottiene:

$$F_x(t, \tau) = F_x(t) e^{-\int_t^\tau i_x(t, \nu) d\nu} + \int_t^\tau \left[\sum_{j=0}^h p_{jx}(t, \nu) H_{jx}(t, \nu) + R_x(t, \nu) - \sum_{j=0}^{h+m} p_{jx}(t, \nu) C_{jx}(t, \nu) \right] e^{-\int_\nu^\tau i_x(t, \mu) d\mu} d\nu.$$

Questo è l'importo dei finanziamenti che gli individui, all'istante t , contano di possedere al tempo τ , pari al montante dei finanziamenti attualmente posseduti, accresciuto o ridotto del montante delle eccedenze previste, positive o negative, dei redditi monetari da conseguirsi fino a quel momento sui consumi da godersi nello stesso intervallo.

Ponendo: $F_x(t, \tau)_{(\tau=v_x)} = 0$ — è l'altra condizione (2) — si ha:

$$(4) \quad \int_t^{v_x} \sum_{j=0}^{h+m} p_{jx}(t, \tau) C_{jx}(t, \tau) e^{-\int_t^\tau i_x(t, \nu) d\nu} d\tau = F_x(t) + \int_t^{v_x} \left[\sum_{j=0}^h p_{jx}(t, \tau) H_{jx}(t, \tau) + R_x(t, \tau) \right] e^{-\int_t^\tau i_x(t, \nu) d\nu} d\tau.$$

Il secondo membro di questa equazione, dato t , rappresenta l'importo dei finanziamenti posseduti a questo momento, più o meno il valore attuale (previsto) di ogni risorsa futura, positiva o negativa; rappresenta cioè i *patrimoni* individuali.

La (4) può sostituirsi al bilancio (1) e alle (2), da cui è stata dedotta, e insieme alle (3) rappresenta, in una seconda forma, il sistema di equazioni dell'equilibrio dinamico e del moto storico delle economie consumatrici.

Mentre le (3), si è veduto, per ogni valore di t , danno tutt'una serie di possibili posizioni di equilibrio dinamico dei consumi previsti, la (4) segna, in altra forma, il limite posto al tenore di vita del consumatore dalle sue condizioni economiche.

Tale limite può così esprimersi:

Il valore attuale della spesa da farsi per tutti i consumi che gli individui si propongono, a un dato istante, di procurarsi nell'intero corso, previsto, della loro esistenza, deve essere uguale al patrimonio posseduto a quell'istante.

II. LA NATURA ECONOMICA E FINANZIARIA DEL RISPARMIO. — Può ora cogliersi l'intima natura, economica e finanziaria, del risparmio o della dissipazione (F_x): ripartire nel tempo — nell'intervallo $\tau = (t, v_x)$ — nel modo più conveniente, il consumo del patrimonio e dei suoi proventi. Dati l'interesse ed i prezzi previsti, l'utilità attribuita ai consumi futuri e il patrimonio posseduto, risulta senz'altro determinata — per le (3) e la (4) — l'estensione presente e futura dei consumi. Ad un dato istante si risparmia, offrendo nuovi finanziamenti o rimborsi, oppure si dissipa, chiedendo nuovi finanziamenti o rimborsi, secondo che il reddito monetario risulti maggiore o minore del valore del consumo totale.

È evidente che, se in un certo intervallo di tempo si risparmia, bisogna far conto di dissipare in avvenire, e, se si dissipa più del patrimonio posseduto, bisogna proporsi di risparmiare.

Tutto ciò non esclude il caso di individui che si propongano di accumulare un patrimonio, in un periodo di tempo più o meno lungo,

al fine di goderne poi le rendite, ma suppone sempre che, prima o poi, anche il patrimonio si voglia destinare al consumo. Nel secondo capitolo (sez. I), ove si terrà conto del « bisogno di elargire », è contemplato il caso di individui che si propongono di accumulare un patrimonio con l'intenzione di cederlo in tutto o in parte ad altri.

Così, differendo il consumo di risorse presenti, oppure anticipando il consumo di risorse future, si tende a conseguire un massimo di benessere. Ma questa mèta gli individui non raggiungono mai, perchè continuamente costretti a cambiare la direzione del proprio cammino.

12. CENNI ILLUSTRATIVI. — Nell'equilibrio dinamico individuale i problemi ricevono tutti simultanea soluzione mediante un calcolo unitario di convenienza economica, inscindibile nelle sue parti. Consumi e risparmi, domande e offerte di beni servizi e finanziamenti, estensione (prevista) del patrimonio sono tutte grandezze legate le une alle altre, che non trovano separata determinazione, ma risultano da un'accorta ricerca di massimo benessere che le coordina tutte. Dipendono perciò, ciascuna, da tutti i dati del problema: dall'apprezzamento dell'utilità dei consumi futuri, dai finanziamenti posseduti e dalle risorse attese per l'avvenire, da prezzi interesse e dividendi previsti e, attraverso questi, dai relativi valori attuali (di mercato) e dalle loro tendenze.

Se anche uno soltanto di tali elementi assumesse una certa grandezza, anzichè un'altra, tutta la condotta individuale ne risulterebbe modificata. Un solo esempio. Si supponga che un individuo, in un dato periodo di tempo, invece di un certo apprezzamento dell'utilità dei consumi futuri, ne faccia uno maggiore: ciò significa che la sua funzione d'utilità acquista valori più elevati, nell'intervallo (t, v_x) , ed in misura più rilevante per i consumi più lontani. Perchè sia mantenuta la condizione di eguaglianza nel tempo dei tassi marginali ponderati attuali d'utilità (§ 3), bisognerà rettificare la distribuzione della spesa, a scapito dei consumi presenti e prossimi ed a favore di quelli più distanti. Nel presente e nel futuro prossimo l'individuo accrescerà l'offerta di lavoro e di servizi dei beni (H) o ne contrarrà la domanda, e ridurrà la domanda di beni (M), accrescendo così il suo risparmio

in vista di più abbondanti consumi futuri. Non v'è parte del programma che sia rimasta inalterata.

Un po' di riflessione palesa in qual modo si coordinino il problema edonistico, col quale vanno determinate l'estensione e la composizione, presenti e future, dei consumi, ed il problema monetario, riguardante la domanda e l'offerta dei diversi beni e servizi e dei finanziamenti.

L'assunto, che gli individui si propongano di consumare interamente nel corso dell'esistenza il loro patrimonio, insieme ai proventi che contano ritrarne, richiede qualche delucidazione, in considerazione della tendenza della letteratura a ritenere normale o più comune una condotta mirante a incrementare o mantenere integro il patrimonio posseduto. Opinione discutibile, a mio parere, perchè nel corpo sociale esistono anche, ed in misura relevantissima, individui che consumano le loro sostanze. Basta pensare alla classe dei lavoratori, il cui patrimonio è costituito dal solo valore attuale dei salari percepibili in avvenire. Inoltre tutti gli individui, nei diversi periodi della loro vita, risparmiano oppure dissipano a seconda della distribuzione nel tempo del flusso del loro reddito monetario. Si può rilevare come l'impostazione svolta abbracci tutti questi diversi aspetti della dinamica delle economie consumatrici. Che, poi, gli individui si propongano di consumare interamente, prima o dopo, tutti i loro mezzi è cosa perfettamente logica ove si supponga che non intendano cederne nessuna parte, nè in donazione, nè in eredità. In altra sede (cap. II, sez. I) si terrà conto del « Bisogno di elargire ». In altri termini, il programma dei consumi degli individui non può limitarsi al solo reddito, ma deve comprendere tutte le loro risorse, ed allora, a seconda della distribuzione nel tempo delle risorse e della più conveniente ripartizione nel tempo dei consumi, vi saranno, in ogni istante, individui che risparmiano, individui che mantengono integro il loro patrimonio ed individui che dissipano, ma tutti devono proporsi di consumare, prima o poi, i loro mezzi, ove non intendano dar loro altra destinazione, il che qui si esclude ¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Degno di rilievo in proposito, benchè la cosa sia guardata da un diverso punto di vista, è uno studio recente dello Hayek, il quale si sofferma sul caso, che ritiene di parti-

Nell'equilibrio dinamico le previsioni hanno una parte di primissimo ordine, e specialmente quelle che proiettano nel futuro le presenti posizioni del mercato e le loro tendenze, quali prezzi, fitti, salari, interesse, dividendi. È difficile leggere nell'avvenire? Esagerano gli individui in un senso o nell'altro le loro previsioni? Valutano troppo o poco utilità, prezzi, risorse? Sono sempre questi, tuttavia, gli elementi che entrano a far parte dei loro calcoli e che decidono la loro condotta.

L'impostazione data al problema del consumatore-risparmiatore ne rappresenta la condotta in forma generale, e, a mio parere, è più aderente alla realtà di altre, più semplici, possibili, alle quali tuttavia si potrà sempre ricorrere per iscopi particolari. Essa pertanto non esclude che, di fronte alla impossibilità di prevedere il futuro più lontano, gli individui non possano precisare dettagliatamente che i consumi più o meno prossimi, e debbano perciò stabilire, per il rimanente, soltanto delle linee generali di condotta.

La trattazione può costituire un punto di partenza per una ricerca deduttiva — a complemento di una non facile, nè sempre conclusiva ricerca induttiva — intorno alle leggi della condotta individuale in funzione dei prezzi e del saggio di interesse di mercato e delle loro tendenze.

Per taluni scopi il problema deve essere semplificato; per altri bisogna allargarlo in un senso o nell'altro. Nel secondo capitolo considero l'esistenza di « versamenti » fra consumatori e del « bisogno di elargire », il caso che i beni (H) siano scambiabili e l'esistenza di beni durevoli temporanei di consumo.

colare interesse, che si voglia ottenere dal proprio capitale un flusso di reddito costante (F. A. VON HAYEK, *The maintenance of capital*, in « *Economica* », 1935).

III. — L'equilibrio dinamico delle imprese.

13. GLI INVESTIMENTI ED IL PREVENTIVO TECNICO. — Investimenti, reddito e finanziamenti sono gli aspetti fondamentali della gestione d'impresa ¹⁵⁾).

Il problema dinamico degli investimenti consiste nell'illustrare attraverso quali *piani* vengano determinate ad ogni istante — in funzione dei prezzi di mercato e delle loro *tendenze* — le quantità acquistate dei diversi mezzi produttivi, nonché quelle immesse nel processo tecnico di trasformazione industriale. Nonostante l'importanza dell'argomento, lo studio della tecnica economica degli investimenti di impresa, e specialmente delle grandi e delle grandissime imprese industriali, è stato trascurato dagli economisti. Si tratta di studiare questi piani, continuamente riveduti, dando il dovuto peso alle caratteristiche tecniche della gestione e tenendo conto delle condizioni di fatto presenti dell'impresa, dovute o non al passato, nonché delle previsioni tecniche ed economiche relative al futuro ¹⁶⁾).

Qui mi fermo ad uno schema semplicissimo, rimandando al secondo capitolo per una più ampia trattazione.

La fabbricazione degli m beni (M) ha luogo in altrettanti gruppi d'impresa; indico con B_i il numero totale delle imprese costituenti

¹⁵⁾ Sulle relazioni dinamiche, nelle imprese, tra investimenti, reddito e finanziamenti, nei casi di investimenti a flusso rigido ed elastico di servizi, si veggia: L. DE MINICO, *Rinnovamento e liquidità del capitale nelle imprese industriali*, Napoli 1931, cap. II, III; id., *Elasticità e relazioni dinamiche dei costi nelle imprese industriali*, Napoli 1935. Ricordo ancora in proposito: P. ONIDA, *I finanziamenti iniziali d'impresa*, Milano 1931.

¹⁶⁾ Nella presente trattazione, e più specialmente nello studio del problema degli investimenti compiuto nelle sezioni V e VII del seguente capitolo, ho avuto presenti: L. AMOROSO, *La dinamica dell'impresa*, in « Rivista italiana di statistica, economia e finanza », 1933; L. DE MINICO, *Elasticità e relazioni dinamiche dei costi nelle imprese industriali*, Napoli 1935, cap. I, II; J. M. KEYNES, *The general theory of employment, interest and money*, London 1936, cap. 11 e 12. Sul piano degli investimenti veggasi anche: *Conférence internationale du contrôle budgétaire*, negli atti dell'INSTITUT INTERNATIONAL D'ORGANISATION SCIENTIFIQUE DU TRAVAIL, vol. II, Genève 1930; A. CECCHERELLI, *Le prospettive economiche e finanziarie nelle aziende commerciali*, vol. I. *Gli elementi statistico-contabili dell'indagine prospettiva*, Firenze 1931. Sulle previsioni nelle imprese anche: J. JONES, *Business forecasting*, in « Economic Journal », 1928.

il gruppo che fabbrica il prodotto i , e con b_i un imprenditore di questo gruppo ($i=1, \dots, m$; $b_i=1, \dots, B_i$).

In ciascuna impresa — suppongo — la produzione ha luogo mediante un flusso continuo d'investimenti, e la quantità del prodotto ottenuto ad un certo istante dipende dai mezzi immessi nella lavorazione ad un momento passato, distante di un intervallo pari alla lunghezza del periodo produttivo ¹⁷⁾: *nessun'altra congiunzione tecnica lega nel tempo il flusso degli investimenti e il flusso dei prodotti.*

Come ho già accennato, i mezzi di produzione vengono impiegati appena acquistati ed i prodotti sono venduti appena finiti, per cui non ne esistono scorte in magazzino.

In tali ipotesi, ciascun imprenditore regola, ad ogni istante, le dimensioni degli investimenti, in base al prezzo presente di mercato dei mezzi produttivi, alle rese che prevede ottenere e al ricavo che spera conseguire dalla vendita dei prodotti a lavorazione terminata. Poichè l'interesse da pagarsi sui capitali occorrenti al finanziamento della produzione non è prestabilito, all'inizio delle lavorazioni, ma verrà determinato quotidianamente dal mercato nel corso del periodo produttivo, anche questo tasso bisogna prevedere.

Tasso d'investimento è la quantità d'un mezzo di produzione immesso nella lavorazione per unità di tempo. Si indichino con $Q_{ob_i}(t)$, con $Q_{1b_i}(t), \dots, Q_{hb_i}(t)$ e con $Q_{h+1, b_i}(t), \dots, Q_{h+m, b_i}(t)$ i tassi d'investimento, nell'impresa b_i , rispettivamente del lavoro, dei servizi dei beni (H) e dei beni (M). In Q_{ob_i} è compreso il lavoro prestato dall'imprenditore.

Il flusso degli investimenti, ad un certo istante, determina il flusso dei prodotti al termine del periodo produttivo di durata ω_{b_i} , *diverso da impresa ad impresa*. Sia:

$$Y_{b_i}(t, Q_{ob_i}, \dots, Q_{h+m, b_i}),$$

¹⁷⁾ Non mi soffermerò a mettere in rilievo l'influenza, decisiva, che l'esistenza di questo intervallo ha sul movimento economico. Interessanti in proposito sono gli studi: U. RICCI, *Die synthetische Oekonomie von H. L. Moore*, in « Zeitschrift für Nationalökonomie », 1930; J. TINBERGER, *Utilisation des équations fonctionnelles et des nombres complexes dans les recherches économiques*, in « Econometrica », vol. I.

la quantità di prodotto (per unità di tempo) che b_i prevede, all'istante t , di ottenere, a lavorazione terminata (ossia all'istante $t + \omega_{b_i}$), dall'investimento compiuto a quel momento dei diversi beni. Y_{b_i} denominerò *tasso totale di produttività*.

Per brevità d'esposizione esprimo le leggi della tecnica mediante un'unica relazione ¹⁸⁾. La complessità e varietà di tali leggi non mi permette di fissare in forma generale la natura della Y_{b_i} . Per facilità di ragionamento, nell'interpretazione della teoria, può assumersi:

$$\frac{\partial Y_{b_i}}{\partial Q_{j b_i}} > 0, \quad \frac{\partial^2 Y_{b_i}}{\partial Q_{j b_i}^2} < 0,$$

$j = 0, \dots, h+m;$

ossia che, in funzione di ciascun mezzo di produzione, il tasso totale di produttività sia crescente, ricevendo tuttavia incrementi sempre più piccoli. Il valore $\frac{\partial Y_{b_i}}{\partial Q_{j b_i}}$ è il *tasso marginale (previsto) di produttività*: quantità di prodotto, per unità di tempo e di bene, ottenuto dall'ultima dose (infinitesima) di mezzo produttivo.

Il tasso totale di produttività è, in forma sintetica, un preventivo tecnico industriale. Si vedrà in seguito fino a qual punto le previsioni saranno confermate dai risultati della gestione. In funzione di t , questo tasso rappresenta il modificarsi, nel corso del tempo, delle previsioni dei rendimenti delle lavorazioni, a causa dei perfezionamenti acquisiti nella gestione industriale ed amministrativa, dei progressi della tecnica produttiva, dell'avvicinarsi delle stagioni e simili.

14. IL PREVENTIVO ECONOMICO E L'EQUILIBRIO DINAMICO DEGLI INVESTIMENTI. — Esiste dunque, nello schema assunto della produzione, un rapporto di dipendenza *diretto ed esclusivo* fra i prodotti ottenuti all'istante $t + \omega$ e le dimensioni degli investimenti effettuati all'istante t . Pertanto, ad ogni istante, gli imprenditori determinano le quantità da

¹⁸⁾ Cfr. L. AMOROSO, *Lezioni di economia matematica*, Bologna 1921, pag. 269 e segg.

immettere nel processo produttivo dei diversi beni con la condizione di massimo della differenza fra il ricavo (previsto) dei primi ed il costo (previsto) dei secondi, ossia del reddito (previsto) delle lavorazioni.

Sia $p_{b_i}(t)$ il prezzo a cui b_i , all'istante t , prevede di vendere il prodotto a lavorazione terminata (al tempo $t + \omega_{b_i}$). Il *ricavo previsto* è pertanto: $p_{b_i} Y_{b_i}$. Al solito p_{b_i} è funzione anche del prezzo di mercato del bene i , p_{h+i} , e della sua derivata p_{h+i}' .

Il *costo previsto* è uguale al prezzo totale di acquisto dei beni investiti, accresciuto degli interessi per un periodo di tempo pari alla durata della produzione. Essendo $i_{b_i}(t, \nu)$ il saggio previsto — funzione di i e i' —, il *reddito previsto* delle lavorazioni risulta:

$$R_{b_i}(t) = p_{b_i} Y_{b_i} - \sum_{j=0}^{h+m} p_j Q_{j b_i} e^{\int_t^{t+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \tau) d\tau}$$

I produttori, a somiglianza dei consumatori, si coprono contro i rischi e le incertezze dell'avvenire, valutando pessimisticamente rendimenti industriali, prezzi e saggio dell'interesse.

Bisogna determinare i valori delle $Q_{j b_i}$ che rendono massimo R_{b_i} . Si eguagliano a zero le derivate parziali di R_{b_i} rispetto a ciascuna incognita. Si ottiene:

$$(5) \quad p_{b_i} \frac{Y_{b_i}}{Q_{j b_i}} = p_j e^{\int_t^{t+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \tau) d\tau}$$

$j = 0, \dots, h+m;$
 $b_i = 1, \dots, B_i; i = 1, \dots, m;$

il che significa che, ad ogni istante, *conviene investire in misura tale che il ricavo del prodotto, per unità di tempo e di bene, ottenuto dall'ultima dose (infinitesima) di mezzo produttivo* — è il valore del tasso marginale di produttività, ossia il tasso marginale di ricavo — *ne e-*

guagli il costo correlativo, e cioè il prezzo unitario d'acquisto, accresciuto degli interessi per la durata del periodo produttivo. Fino a questo punto, infatti gli investimenti marginali sono redditizi; più oltre, essendo decrescenti i tassi marginali di produttività, il ricavo, al margine, non coprirebbe i costi.

In termini di quantità prodotte si parla dunque di produttività e in termini di valore di costi e di ricavi.

Sono $l+h+m$ equazioni, atte a determinare gli altrettanti tassi degli investimenti, le quali esprimono le *condizioni dell'equilibrio dinamico degli investimenti di impresa*. La Y_{b_i} (§ 13) dà il prodotto finito previsto.

Le (5) possono anche scriversi:

$$(6) \quad \frac{P_{b_i} Y_{b_i}}{t + \omega_{b_i}} = 1, \\ \int_t^{\infty} i_{b_i}(t, \tau) d\tau \\ p_j Q_{j b_i} e$$

in cui il primo membro è il rapporto fra il valore dell'incremento di prodotto per unità di tempo, ottenuto dall'ultima dose (infinitesima) dei beni investiti (il numeratore della frazione), ed il suo costo (il denominatore); è cioè il ricavo marginale, per unità di tempo e di costo, dei mezzi produttivi. Lo chiameremo *tasso marginale ponderato di ricavo*.

Le condizioni dinamiche degli investimenti d'impresa possono pertanto esprimersi anche con l'*eguaglianza, fra loro e con l'unità, dei tassi marginali ponderati di ricavo*.

Nel primo membro della (6) il rapporto

$$\frac{1}{t + \omega_{b_i}} \frac{\partial Y_{b_i}}{\partial Q_{j b_i}} \\ \int_t^{\infty} i_{b_i}(t, \tau) d\tau \\ p_j e$$

rappresenta il tasso marginale di produttività del mezzo j diviso per il suo costo unitario. È cioè il suo *tasso marginale ponderato di produttività*. Il primo membro della (6) è il valore di questo tasso. Tasso marginale ponderato di ricavo e valore del tasso marginale ponderato di produttività sono dunque la stessa cosa.

Ai fini dell'equilibrio generale terrò presente, che, attraverso le soluzioni svolte ed i prezzi e il saggio dell'interesse previsti che vi figurano, le Q_{jb_i} risultano funzioni dei prezzi e del saggio d'interesse di mercato p_j ($j=0, \dots, h+m$) e i , e delle derivate p_{h+i}' e i' .

Il problema studiato poteva anche porsi in altra forma, determinando prima i tassi d'investimento di costo minimo, in funzione della quantità da prodursi ¹⁹⁾, e poi, con la condizione di massimo reddito, l'estensione più conveniente della produzione.

15. IL REDDITO DA RIPARTIRE. — Ad ogni istante, nel mentre hanno inizio le nuove lavorazioni, le imprese portano a compimento e vendono il prodotto degli investimenti effettuati a un momento passato, distante d'un intervallo pari alla durata del periodo produttivo, e per cui avevano contato su un certo costo, che può risultare diverso a causa delle divergenze fra saggio d'interesse previsto e saggio di mercato, e su un certo ricavo che può anche non conseguirsi per i possibili divari fra prezzo di vendita previsto e prezzo di vendita effettivo, e fra rendimento industriale previsto e rendimento effettivo.

Sia:

$$Y_{b_i} \left[t, Q_{0b_i}(t - \omega_{b_i}), \dots, Q_{h+m, b_i}(t - \omega_{b_i}) \right],$$

l'effettivo tasso totale di produttività degli investimenti compiuti allo istante $t - \omega_{b_i}$. In funzione di t , esprime il variare dei rendimenti *effettivi* delle lavorazioni, a causa dei perfezionamenti acquisiti nella gestione industriale e amministrativa, dei progressi della tecnica produttiva, dell'avvicinarsi delle stagioni e simili.

¹⁹⁾ L. AMOROSO, *Lezioni di economia matematica*, Bologna 1921, pag. 303 e segg.

La determinazione del reddito effettivamente conseguito è problema da cui si può prescindere. Bisogna invece determinare il reddito da ripartire, il che nella pratica ha luogo in base ai più svariati criteri, fra cui primeggia la *manovra dei dividendi*, diretta a distribuire e livellare nel tempo gli utili nel modo più opportuno e per iscopi diversi²⁰). Qui suppongo che le imprese ripartiscano, ad ogni istante, la differenza fra il ricavo ottenuto dalla vendita dei prodotti finiti e il costo dei medesimi, pari al prezzo totale d'acquisto dei beni investiti all'inizio della produzione (all'istante $t - \omega_{b_i}$), accresciuto degli interessi computati, per la durata del periodo produttivo, al saggio che è stato in vigore sul mercato in questo intervallo. Tale reddito è pertanto:

$$(7) \quad R_{b_i} = p_{h+i} Y_{b_i} - \sum_{i=0}^{h+m} p_j (t - \omega_{b_i}) Q_{j b_i} (t - \omega_{b_i}) e^{\int_{t-\omega_{b_i}}^t i(v) dv}$$

$b_i = 1, \dots, B_i; i = 1, \dots, m.$

Questo è il dividendo totale da ripartirsi quotidianamente — suppongo ancora — fra i consumatori che partecipano ai risultati dell'impresa o la perdita che i medesimi sono chiamati a colmare.

16. IL BILANCIO FINANZIARIO E DI CASSA. — Bisogna ora redigere il bilancio finanziario. In ogni istante, le imprese acquistano nuovi mezzi produttivi, pagano gli interessi sui finanziamenti in corso, realizzano con la vendita il prezzo dei prodotti finiti, ripartiscono il reddito conseguito fra le economie consumatrici partecipanti, oppure ne ricevono i

²⁰) Ricordo in proposito: J. FISHER, *La natura del capitale e del reddito*, in « Biblioteca dell'economista » serie V, vol. IV, p. 177 e segg.; G. ZAPPA, *La determinazione del reddito nelle imprese commerciali*, Milano 1920-29, § 71; G. BERNHARD, *Dividendenpolitik in der Depression*, in « Magazin der Wirtschaft », 1930, nn. 51-52; e, in particolare, sulla politica dell'autifinanziamento delle imprese mediante sottrazione alla ripartizione degli utili conseguiti: W. PRION, *Selbstfinanzierung der Unternehmungen*, Berlin 1931; CONRAD, *Die Selbstfinanzierung der Unternehmung*, Berlin 1931.

versamenti in caso di perdite; infine, se le uscite superano le entrate *domandano* nuovi finanziamenti, in caso contrario, *offrono* rimborsi.

Sia $F_{b_i}(t)$ l'importo totale dei finanziamenti d'impresa ad ogni istante t . La domanda o l'offerta (rimborsi) di finanziamenti, per unità di tempo, risulta pertanto:

$$(8) \quad F_{b_i} = \sum_{j=0}^{h+m} p_j Q_{jb_i} + i F_{b_i} + R_{b_i} - p_{h+i} Y_{b_i},$$

$b_i = 1, \dots, B_i; i = 1, \dots, m;$

in cui agli ultimi due termini può sostituirsi la loro somma data dalla (7).

Anche le F_{b_j} , che appariranno nell'equilibrio generale, sono funzioni dei prezzi e del saggio d'interesse di mercato p_j ($j = 0, \dots, h+m$) e i , e delle loro derivate p_{h+i} e i' , attraverso i termini che le compongono.

Poichè ciascuna impresa ricorre interamente al credito per il finanziamento della produzione e poichè quotidianamente ripartisce gli utili conseguiti oppure riceve il rimborso delle perdite sopportate, lo importo dei finanziamenti di cui è debitrice è pari, ad ogni istante, al costo già maturato degli investimenti relativi alle lavorazioni in corso (quelle iniziate nell'intervallo $[t - \omega_{b_i}, t]$), e quindi anche alla somma dei costi sopportati nel passato che non hanno ancora avuto i correlativi ricavi ²¹). Calcoliamo questa somma. All'istante t i costi sopportati in relazione alla lavorazione iniziata al momento v , compreso nell'intervallo $(t - \omega_{b_i}, t)$, ammontano a:

$$\sum_{j=0}^{h+m} p_j(v) Q_{jb_i}(v) e^{\int_v^t i(\mu) d\mu};$$

²¹) Si veggia in proposito: P. ONIDA, *I finanziamenti iniziali d'impresa*, Milano 1931.

l'importo totale dei finanziamenti all'istante t è quindi:

$$(9) \quad F_{b_i}(t) = \int_{t-\omega_{b_i}}^{t-h+m} \sum_{j=0} P_j(v) Q_{jb_i}(v) e^{\int_v^t i(\mu) d\mu} dv.$$

Può riscontrarsi come la (9) sia l'integrale della (8), modificata mediante la (7) nel modo anzidetto.

La (8) può anche scriversi sostituendo alla F_{b_i} il suo valore dato dalla (9).

Le (5), (7) e (8) sono le equazioni dell'equilibrio dinamico e del moto storico delle imprese.

IV. — L'equilibrio dinamico generale.

17. LE EQUAZIONI. — Nello studio degli equilibri singoli ho supposto noti il listino dei prezzi e le loro tendenze. Le domande e le offerte da parte di consumatori e imprese di ogni bene e servizio e di finanziamenti dipendono perciò, ad ogni istante, dal saggio dell'interesse e dai prezzi di mercato, nonchè dalle loro derivate. Sono queste le incognite da determinarsi nell'equilibrio generale.

Si consideri un mercato perfetto tanto bene organizzato che i prezzi fatti in ogni negoziazione vengano istantaneamente conosciuti da tutti, e che tutti siano in condizione di formulare istantaneamente la propria domanda od offerta per ogni bene, appena conosciuto il listino dei prezzi.

In tal caso, ad ogni momento e per ogni bene, non potrà esistere che un sol prezzo, e l'equilibrio si stabilirà a quel listino che eguagli simultaneamente la domanda e l'offerta di tutti i beni. E dico simultaneamente, perchè, come è noto, i prezzi di equilibrio costituiscono un sistema di variabili strettamente interdipendenti, onde la loro de-

terminazione non può compiersi mediante l'adattamento delle singole domande ed offerte separatamente, ma attraverso opportune revisioni dall'intero listino.

In un mercato così organizzato, l'equilibrio si stabilisce come se un banditore, ad ogni istante, modificasse opportunamente i prezzi in vigore un momento prima, ricevendo immediatamente le comunicazioni delle domande e delle offerte individuali, e proseguisse istantaneamente nella correzione del listino fin quando non risultassero verificate le accennate condizioni di equilibrio.

Le quali discendono dal principio fondamentale della dinamica e sono:

$$(10) \quad \sum_{x=1}^X (H_{jx} - C_{jx}) - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} Q_{jb_i} \right) = 0,$$

$j = 0, \dots, b;$

$$(11) \quad \sum_{b_i=1}^{B_i} Y_{b_i} - \sum_{x=1}^X C_{jx} - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} Q_{jb_i} \right) = 0,$$

$j = h + i; i = 1, \dots, m;$

$$(12) \quad \sum_{x=1}^X F_x' - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} F_{b_i}' \right) = 0,$$

in cui le C_{jx} e F_x' , e le Q_{jb_i} , Y_{b_i} e F_{b_i}' sono funzioni determinate nel modo indicato nello studio degli equilibri singoli dei consumatori e delle imprese.

I termini della prima sommatoria della (10) rappresentano, secondo che siano positivi o negativi, l'offerta o la domanda (per unità di tempo) di lavoro e di servizi dei beni (H) da parte dei consumatori, e la loro somma algebrica è l'*offerta netta* destinata a soddisfare la *domanda* che ne fanno le imprese (la seconda sommatoria dell'equazione). A problema risolto, questo gruppo di equazioni ci dice quanta parte dell'esistenza totale (per unità di tempo) di tali beni sia consumata direttamente dai possessori, quanta parte venga da costoro ceduta ad altri a scopo di consumo, quanta infine riceva impiego produttivo.

Ci dà inoltre la ripartizione di queste quantità tra i diversi consumatori e tra le diverse imprese.

Le (11) rappresentano l'eguaglianza, ad ogni istante, della domanda totale di mercato dei beni (M), da parte di consumatori e produttori (il secondo ed il terzo termine dell'equazione), con le quantità prodotte ed offerte dalle imprese (il loro primo termine). Esse danno quindi la ripartizione, ad ogni istante, del flusso dei prodotti finiti tra il consumo e la produzione, nonché tra i diversi individui e le diverse imprese.

La prima sommatoria della (12), infine, se positiva, rappresenta l'eccedenza netta dell'*offerta di nuovo risparmio* (pari alla somma dei termini positivi) sulla *domanda di finanziamenti* dei dissipatori (pari alla somma dei termini negativi) destinata a soddisfare la *domanda netta* da parte dei produttori di nuovi finanziamenti (pari alla differenza tra la somma dei termini positivi della seconda sommatoria e la somma dei suoi termini negativi, i quali ultimi rappresentano offerte di rimborsi).

Se negativa, la prima sommatoria misura invece l'eccedenza netta della *domanda di finanziamenti* sull'*offerta* da parte dei consumatori, la quale assorbe l'*offerta netta di rimborsi*, da parte dei produttori, rappresentata dalla seconda sommatoria.

Quest'ultima equazione, a problema risolto, dà l'intero conto finanziario sociale.

Mancano le equazioni con le quali i redditi delle imprese vengono ripartiti fra gli individui partecipanti, e sono così determinate le funzioni R_x ($x = 1, \dots, X$) che nell'equilibrio dei consumatori furono supposte note insieme alle loro derivate. Per semplicità, suppongo che tali ripartizioni abbiano luogo in base ad uno stato di fatto o di diritto per cui sia determinata l'aliquota del reddito di ciascuna impresa spettante a ciascun individuo. Essendo $\rho_{xb_i}(t) \geq 0$ la quota unitaria del reddito dell'impresa b_i spettante a x , il suo dividendo totale (per unità di tempo) risulta allora:

$$(13) \quad R_x = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} \rho_{xb_i} R_{b_i} \right),$$

$x = 1, \dots, X.$

Deve essere evidentemente: $\sum_{x=1}^X \rho_{xb_i} = 1$. Le ρ_{xb_i} sono *dati* del problema.

Può sorgere un dubbio: come si è potuto nell'equilibrio dei consumatori considerare conosciuti i dividendi loro spettanti (le R_x), se i redditi delle imprese dipendono — v. la (7) — dai risultati industriali ottenuti, dai criteri adottati nell'imputazione dei costi e dai prezzi di vendita, che vengono determinati nell'equilibrio generale del mercato? Basta supporre che i consumatori siano ad ogni momento informati della situazione contabile, dei risultati tecnici e dei criteri di imputazione dei costi delle imprese cui partecipano: eccoli in possesso degli elementi necessari per calcolarsi, in funzione dei prezzi dei prodotti, le R_{b_i} e, con queste, le R_x che appaiono nelle R_x dei bilanci dell'entrata e dell'uscita (1).

Può anche pensarsi che sul mercato, ad ogni listino dei prezzi gridato dal banditore immaginato, i produttori, oltre alle quantità domandate ed offerte, facciano conoscere anche il profitto realizzato a quel listino.

18. IL MOTO STORICO. — L'equilibrio dinamico generale è ora determinato. Alle equazioni degli equilibri singoli dei consumatori e dei produttori, a suo tempo dimostrate sufficienti a determinare le incognite relative, ho ora aggiunte, oltre le (13), che forniscono le R_x , le $1+h+m+1$ equazioni (10), (11) e (12) in numero uguale alle nuove incognite: i prezzi del lavoro, dei servizi dei beni (H) e degli m beni (M), ed il tasso dell'interesse. Poichè il prezzo del bene assunto come numerario, p_{h+1} , è uguale all'unità (§ 6), viene a mancare un'incognita, ma si può constatare come fra le (1), le (8) e le (10), (11) e (12), tenuto conto delle (13), se ne possa eliminare una, in quanto

che ciascuna di esse può ottenersi per mezzo delle rimanenti. Ad esempio, si faccia la somma algebrica, membro a membro delle (1), posto $\tau=t$ (per $x=1, \dots, X$), e delle (8) (per $b_i=1, \dots, B_i$; $i=1, \dots, m$); poi si moltiplichino la (10) e la (11) per p_j e si sommino algebricamente, membro a membro, i risultati ottenuti ($j=0, \dots, h+m$); se tenuto conto delle (13) si sottrae la seconda somma dalla prima, si otterrà la (12) che può perciò eliminarsi.

Le (10), (11) e (12), una volta che vi siano stati introdotti i risultati ottenuti dalla soluzione dei problemi individuali, costituiscono un sistema di equazioni integro-differenziali da risolversi mediante i procedimenti del calcolo funzionale.

Le costanti di integrazione relative alle derivate p_j' e i' possono determinarsi con la condizione che siano date le tendenze dei prezzi all'origine dei tempi t_0 , e cioè che siano:

$$p_j'(t_0) = p_{0j}' \quad (j=0, \dots, h+m), \quad i'(t_0) = i_0'.$$

Infine devono esser noti: i tassi d'investimento delle imprese, i prezzi dei mezzi di produzione ed il saggio dell'interesse, nell'intervallo $(t_0 - \omega_{b_i}, t_0)$, necessari per determinare i costi dei prodotti, i redditi ed i finanziamenti delle imprese nell'intervallo $(t_0, t_0 + \omega_{b_i})$, (v. la (7) e la (9)).

Integrato il sistema, le soluzioni ottenute danno, per ogni valore di t , l'equilibrio dinamico a quel momento, e, in funzione di t , la descrizione statistica del moto storico dell'economia sociale considerata a partire dall'istante assunto ad origine dei tempi.

Ecco risolti i problemi formulati nelle prime pagine di questo scritto (§ 2).

Nel capitolo seguente allargo le basi dell'equilibrio dinamico designato e studio diversi nuovi problemi. Le singole trattazioni possono inserirsi separatamente nel problema generale, più semplice, considerato nel presente capitolo.

CAPITOLO SECONDO.

ALCUNE ESTENSIONI DELLA TEORIA

I. — Il « bisogno di elargire », ed i « versamenti », fra consumatori.

19. IL « BISOGNO DI ELARGIRE ». — Fin qui non ho tenuto conto, nell'economia dei consumatori, delle spese per beneficenze, donazioni, lasciti ereditari e simili. Il bisogno di soccorrere i poveri, quello di mantenere alla propria famiglia un certo stato economico e sociale, il desiderio di legare il proprio nome ad opere di beneficenza e di giovare alle persone cui si è legati da vincoli di parentela o di amicizia, ed ogni altra esigenza del genere sono tutti bisogni che possono denominarsi brevemente: « bisogno di elargire ». Elemento di grande importanza, questo, nell'equilibrio del sistema economico, che agisce in due principali direzioni: da una parte opera una redistribuzione dei consumi a vantaggio di persone e classi meno abbienti (assistenza e beneficenza), dall'altra influisce sull'estensione del risparmio e del capitale sociale, inducendo gli individui a sottrarre ingenti patrimoni al consumo nel corso della loro vita (eredità, donazioni) (cfr. § 12).

Le « elargizioni » sono soggette anch'esse al calcolo edonistico; al pari dei beni e dei servizi hanno un proprio tasso di utilità, costituiscono una spesa consuntiva e vanno determinate, insieme a tutte le altre incognite, nell'equilibrio dinamico. Sono *prospettive* quelle previste, *attuali* o *storiche* quelle che effettivamente vengono eseguite. Sono passive per chi le fa, attive per chi le riceve.

Pertanto nei tassi totali d'utilità U_x bisogna introdurre una nuova variabile, $C_{ex}(t, \tau)$, indicante le « elargizioni » prospettive (passive); quelle attuali si ottengono al solito ponendo $\tau = t$, e sono :

$$C_{ex}(t) = C_{ex}(t, \tau)_{(\tau=t)}.$$

Le C_{ex} vanno introdotte nei bilanci (1) — con segno negativo, dato che indicano una uscita — ove, per simmetria, può anche porsi $p_{ex}(t, \tau) C_{ex}(t, \tau)$, essendo $p_{ex} = 1$. Evidentemente è anche $p_e(t) = 1$.

Questa nuova incognita richiede una nuova equazione. Alle (3) bisogna infatti aggiungere la seguente eguaglianza :

$$\frac{1}{p_{ex}} \frac{\partial U_x}{\partial C_{ex}} = u_x e^{\int_t^\tau i_x(t, \nu) d\nu}.$$

L'« elargizione » attuale (passiva) è, si è veduto, C_{ex} , con l'importo della quale si può supporre che ne risulti determinata anche la ripartizione fra i diversi soggetti. Indicando con E_{xz} l'elargizione di x a favore di z ($E_{xx} = 0$), dovrà essere :

$$\sum_{z=1}^X E_{xz} = C_{ex}.$$

Ciascun individuo può ricevere a sua volta delle elargizioni. Sia $E_x(t, \tau)$ l'importo delle elargizioni (per unità di tempo) che x all'istante t , prevede di ottenere all'istante τ . Essendo $E_{zx}(t)$ l'elargizione che z fa ad x , le elargizioni attuali (attive) di quest'ultimo sono :

$$E_x = E_x(t, \tau)_{(\tau=t)} - \sum_{z=1}^X E_{zx}.$$

Anche la E_x va introdotta nella (1), ma rappresentando un'entrata con segno positivo. Questa funzione, oltre che da E_x , può farsi dipendere anche da E_x . Non potendo conoscere le somme che nel futuro

verranno loro elargite, gli individui — suppongo — ne prevedono ad ogni istante l'importo sulla base della loro *tendenza* attuale.

Può sorgere un dubbio, simile a quello chiarito nel § 17 a proposito della R_x e che si scioglie in modo analogo. Come può introdursi nell'equilibrio dinamico di ciascun individuo la E_x , con la sua derivata, se questa funzione è determinata dal complesso calcolo degli altri consumatori e dipende dai prezzi effettivi di mercato, che soltanto nell'equilibrio generale trovano determinazione? Basta supporre che ciascun individuo conosca i programmi di tutti gli altri: così x potrà calcolarsi le sue elargizioni attuali attive in funzione dei prezzi di mercato e delle loro derivate. Può anche immaginarsi che, gridato sul mercato il listino dei prezzi, i consumatori facciano conoscere, per mezzo del banditore, anche le somme che intendono elargire a quel listino.

Mi limito ad impostare il problema senza soffermarmi ad esaminare l'influenza che le « elargizioni » hanno sulla configurazione dell'equilibrio.

20. I « VERSAMENTI » TRA CONSUMATORI. — Oltre che per debiti e crediti originati da prestiti, gli individui riscuotono o pagano delle somme per canoni e censi, imposte e tasse, vitalizi, pensioni, sussidi e simili, che per semplicità suppongo funzioni del solo tempo, indipendenti perciò dagli altri elementi dell'equilibrio dei consumatori, e determinate da uno stato di fatto o di diritto conosciuto dagli interessati soltanto al momento stesso in cui tali versamenti devono effettuarsi.

Essendo $V_{xz}(t)$ i *versamenti*, positivi o negativi (per unità di tempo), che, all'istante t , x deve fare a z , il totale dei versamenti di x a questo momento è:

$$V_x = \sum_{z=1}^X V_{xz}.$$

Siano $V_x(t, \nu)$ i versamenti che x prevede, all'istante t , di ricevere o fare nel futuro secondo che $V_x \leq 0$. Al solito deve essere:

$$V_x(\tau=t) = V_x.$$

La V_x è un dato del problema da includersi nel bilancio (1) con segno positivo.

Non sfuggirà, nell'interpretazione della teoria, la parte che hanno i *versamenti* nella configurazione dell'equilibrio dinamico e del moto storico.

II. — I beni durevoli perpetui nelle economie di consumo.

21. — IL PROBLEMA. — In una prima, più semplice, formulazione dell'equilibrio dinamico, esposta nel precedente capitolo, ho escluso che i beni (H) possano essere oggetto di scambio, supponendone data la ripartizione fra gli individui ed ammettendo che quantità esistenti e ripartizione possano mutare, nel corso del tempo, soltanto per ragioni estranee allo scambio. Consideriamo ora il caso che questi beni siano perpetui e *perfettamente divisibili*, e che le quantità possedute possano variare solo in conseguenza di scambi.

Il problema dinamico dei consumatori si complica, ma ne rimane immutata l'impostazione. Essi operano sempre, ad ogni momento, sul mercato, in base a programmi di condotta per l'avvenire.

L'acquisto di beni (H) per ritrarne un lucro è una nuova possibilità d'impiego delle disponibilità liquide ed un nuovo motivo di domanda di finanziamenti. I patrimoni comprendono ora anche il valore di questi beni.

Subiscono modificazioni le leggi dell'equilibrio dinamico del consumo? In quel modo sono ora determinati i tassi del risparmio o della dissipazione, e in qual misura gli individui ripartiscono il nuovo risparmio fra i singoli investimenti o attingono dai diversi elementi patrimoniali i fondi da dissipare? Quali sono le domande e le offerte individuali di beni (H)? Conviene, e in quali proporzioni, realizzare il valore di alcuni investimenti per sostituirli con altri più redditizi? Quanta parte dei beni posseduti viene adibita alla soddisfazione dei propri bisogni e quanta viene ceduta in fitto?

22. LE SPESE DI « MANTENIMENTO ». — Indico anche qui con H_{jx} (t, τ) la quantità del bene j che, all'istante t , x prevede di possedere al tempo $\tau \geq t$ ($j=1, \dots, h$); ora però H_{jx}' , in cui l'apice indichi la derivata rispetto a τ , è il tasso di scambio previsto. Essendo $H_{jx}(t)$ le quantità possedute attualmente, deve essere evidentemente:

$$H_{jx} = \bar{H}_{jx} + \int_t^{\tau} H_{jx}' dv.$$

I prezzi di mercato di questi beni siano $P_j(t)$ e i prezzi previsti $P_{jx}(t, \tau)$, funzioni di P_j e P_j' ($j=1, \dots, h$; $x=1, \dots, X$).

La determinazione della più conveniente composizione del patrimonio vien fatta in base alla *redditività marginale* dei singoli investimenti. Per i finanziamenti mantengo l'ipotesi che diano un interesse non prefissato per un determinato periodo di tempo, ma negoziato in modo continuo sul mercato. Circa i beni (H) bisogna aver presente che richiedono il pagamento di imposte e tasse, e spese diverse di manutenzione, riparazione ed amministrazione, le quali costituiscono un elemento di costo dei loro servizi e ne assimilano la cessione in locazione alla gestione di un'impresa. Per semplicità, invece di tener conto esplicitamente dei beni e servizi e delle altre spese occorrenti, suppongo che gli individui debbano sostenere ad ogni momento una *spesa totale di mantenimento* $M_x(t, H_{1x}, \dots, H_{hx})$, conosciuta dagli interessati soltanto nel momento in cui deve effettuarsi e determinata da certe circostanze di fatto o di diritto. La spesa prevista all'istante t da x sia: $M_x(t, \tau, H_{1x}, \dots, H_{hx})$, ($x=0, \dots, X$). Anche qui deve essere: $M_x(\tau=t) = M_x$. Queste funzioni sono dati del problema.

La M_x è la spesa totale. Circa il comportamento della *spesa marginale* (per unità di tempo) di ciascun bene, possono farsi diverse ipotesi; può assumersi ad esempio che, con l'aumentare della quantità posseduta, decresca in un primo tratto per poi aumentare indefinita-

mente; per semplicità suppongo che sia sempre crescente e con ritmo accelerato, ovvero che siano:

$$\frac{\partial M_x}{\partial H_{jx}} > 0, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial H_{jx}^2} > 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Per quanto riguarda la dipendenza delle spese di mantenimento da t e da τ , possono assumersi le più diverse ipotesi. Però, se si suppone, come faccio, che negli ultimi anni dell'esistenza gli individui amministrino con efficacia sempre minore ed, infine, nulla il proprio patrimonio, bisogna che queste spese per $\tau = v_x$ tendano all'infinito ($M_{x(\tau=v_x)} = \infty$) o almeno ad un livello tale da rendere non più convenienti gli investimenti in tali beni. E allora risulterà:

$$H_{jx}(t, \tau)_{(\tau=v_x)} = 0.$$

Circa la destinazione di queste spese può supporre che vengano ripartite fra tutti gli individui. Essendo $\mu_{xz}(t)$ la quota di partecipazione di x alle spese di z , le somme effettivamente riscosse dal primo (per unità di tempo), all'istante t , sono:

$$N_x(t) = \sum_{z=1}^X \mu_{xz}(t) M_z(t).$$

Evidentemente deve essere:

$$\sum_{x=1}^X \mu_{xz} = 1.$$

Le somme (per unità di tempo) previste di riscuotere siano: $N_x(t, \tau)$, ($x=1, \dots, X$). Al solito deve essere: $N_{x(t=t)} = N_x$. Queste funzioni, al pari delle μ_{xz} , sono dati del problema del consumatore. Poichè la μ_{xz} e la M_z sono note soltanto nel momento in cui le riscossioni devono effettuarsi, bisogna considerare ignoti all'istante t' i valori che assumono per $t > t'$.

La M_x e la N_x vanno introdotte nel bilancio dell'entrata e della spesa, la prima con segno negativo, la seconda con segno positivo.

La N_x , attraverso la N_x , ha per componenti le μ_{xz} e le M_z ($z=1, \dots, X$). Le μ_{xz} , che indicano in qual modo le spese di mantenimento di ciascun individuo si ripartiscono fra tutti gli altri, sono funzioni del tempo soltanto, ma le M_z , attraverso i termini che le compongono, dipendono da tutti gli elementi delle scelte individuali.

I dubbi che sorgessero, circa la legittimità dell'introduzione della N_x fra gli elementi noti del problema di x , andrebbero risolti come per la R_x e la E_x (§§ 17 e 19): ciascun individuo, conoscendo istantaneamente i programmi di tutti gli altri, conosce le M_z , e quindi le N_x , in funzione dei prezzi di mercato.

23. LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO DINAMICO. — Il programma dei consumatori si arricchisce di h nuove incognite: le quantità (previste) da possedere nel futuro e , quindi, i tassi (previsti) d'acquisto dei beni (H). Il bilancio (1) si riscriverà:

$$(14) \quad \sum_{j=0}^h p_{jx} (H_{jx} - C_{jx}) + i_x F_x + R_x + N_x + \\ - \sum_{j=h+1}^{h+m} p_{jx} C_{jx} - F_x' - \sum_{j=1}^h p_{jx} H_{jx}' - M_x = 0,$$

$\tau = (t, v_x),$
 $x = 1, \dots, X,$

in cui i termini $p_{jx} H_{jx}'$ ($j=1, \dots, h$) rappresentano spese o entrate per acquisti o vendite di beni (H).

La somma complessiva di soddisfazioni che i consumatori prevedono di ottenere nel corso della durata prevista della loro esistenza è:

$$U_{vx} = \int_t^{v_x} U_x(t, \tau, C_{0x}, \dots, C_{h+m, x}) d\tau.$$

Bisogna determinare ad ogni istante t i valori, nell'intervallo $\tau = (t, v_x)$, delle funzioni H_{jx} e H_{jx}' ($j=1, \dots, h$), C_{jx} ($j=0, \dots, h+m$) e F_x , legate dalla (14), che rendono massimo U_{vx} con le condizioni (v. §§ 6 e 7):

$$(15) \quad F_x(t, \tau)_{(\tau=t)} = F_x(t), \quad F_x(t, \tau)_{(\tau=v_x)} = 0.$$

La seconda delle (15) esprime anche qui che gli individui intendono consumare nel corso della loro esistenza tutto il patrimonio posseduto. Infatti, come si è supposto (§ 22), nessuna quantità dei beni (H) essi possederanno al termine della loro vita, nè d'altra parte le somme ricavate dalla vendita di questi beni e sottratte al consumo potranno ricevere altra destinazione che non sia quella del finanziamento.

E un problema del calcolo delle variazioni. Per mezzo delle equazioni di Eulero, si ottengono in aggiunta alle (3) le seguenti nuove equazioni (appendice II):

$$(16) \quad \frac{P_{jx} - \frac{\partial M_x}{\partial H_{jx}} + P_{jx}'}{P_{jx}} = i_x,$$

$$\begin{aligned} \tau &= (t, v_x), \\ j &= 1, \dots, h, \\ x &= 1, \dots, X, \end{aligned}$$

necessarie per determinare le altrettante nuove incognite:

$$H_{jx} = H_{jx} + \int_t^\tau H_{jx}' dv.$$

Le (3) e la (14), insieme alle (16) e alle condizioni (15), costituiscono il nuovo *sistema di equazioni dell'equilibrio dinamico dei consumatori*, atto a determinare, ad ogni istante, le incognite dei loro programmi per l'avvenire.

I tassi attuali, storici, dei consumi e dei finanziamenti sono, al solito:

$$C_{jx} = C_{jx(\tau-t)}, F'_x = F'_{x'}(\tau-t),$$

e quelli di scambio dei beni (H):

$$H_{jx}'(t) = H_{jx}'(t, \tau)_{(\tau=t)},$$

$j = 1, \dots, h.$

Si possono ora determinare le quantità possedute, ad ogni istante, di questi beni, dati del problema. Essendo H_{0jx} le quantità disponibili all'origine dei tempi t_0 , è evidentemente:

$$H_{jx} = H_{0jx} + \int_{t_0}^t H_{jx}' d\tau,$$

$j = 1, \dots, h,$
 $x = 1, \dots, X.$

Operando come nel paragrafo 10, alla (14) e alle (15) può sostituirsi un'equazione simile nella forma e nel significato alla (6), contenente, fra gli altri, i termini N_x , M_x e $\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx}'$. Si ottiene in tal modo la *seconda forma delle equazioni dell'equilibrio dinamico dei consumatori*.

24. L'EQUILIBRIO DEGLI INVESTIMENTI. — Le (16) regolano, per ogni valore di t , gli investimenti e la composizione del patrimonio *nei programmi dei consumatori*. Il numeratore della frazione è il *tasso marginale di redditività del bene perpetuo j per l'individuo x* , ossia il reddito, per unità di tempo e di bene, dell'ultima dose (infinitesima) di j posseduta da x all'istante τ . Nel computo di questo tasso, si osservi, entra in conto anche l'incremento di valore, positivo o negativo, del bene stesso (per unità di bene e di tempo).

Il tasso marginale di redditività diviso per il prezzo dà il *tasso marginale ponderato di redditività*, ossia il reddito, per unità di tempo, dell'ultima lira impiegata in ciascun bene.

Pertanto le indicate equazioni permettono di enunciare il seguente teorema:

Ad ogni istante del programma del consumatore, conviene investire nei diversi beni perpetui in misura tale da eguagliare, tra loro e con il saggio dell'interesse, i tassi marginali ponderati di redditività.

Invero, poichè le spese marginali di mantenimento sono crescenti ($\frac{\partial^2 M_x}{\partial H_{jx}^2} > 0$), e quindi questi tassi decrescenti, spingendo oltre gli investimenti le somme addizionali anzichè un lucro darebbero una perdita.

Ma c'è dell'altro. Le (16) costituiscono un sistema di equazioni atto a determinare le quantità dei beni (H) che conviene possedere ad ogni istante, presente o futuro, — le H_{jx} — *indipendentemente* dalle altre scelte del consumatore e dalla grandezza del suo patrimonio. Il valore netto degli investimenti o dei disinvestimenti relativi a questi

beni — $\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx} \cong 0$ — è perciò indipendente dalla convenienza

o meno a risparmiare o dissipare, e varia nel tempo (rispetto a t e a τ) col variare dei soli valori, attuali o prospettivi, dei prezzi dei servizi e dei beni (H), del saggio d'interesse e delle spese di mantenimento.

I disinvestimenti netti sono disponibilità liquide da impiegare; gli investimenti netti richiedono una disponibilità di mezzi liquidi.

25. INVESTIMENTI E RISPARMIO. — Il reddito monetario (per unità di tempo) degli individui è il seguente:

$$\sum_{j=0}^h p_{jx} H_{jx} + i_x F_x + R_x + N_x - M_x;$$

ed il loro consumo totale:

$$\sum_{j=0}^{h+m} p_{jx} C_{jx}.$$

I tassi individuali del risparmio o della dissipazione sono pari all'eccedenza, positiva o negativa, del reddito sul consumo. Quale impiego riceve il risparmio? Oppure, dove si attingono i mezzi da dissipare?

E quale destinazione ricevono i disinvestimenti netti? Oppure, come si provvede agli investimenti netti?

I tassi del risparmio sono anche eguali — v. la (14) — agli investimenti o disinvestimenti netti, relativi ai beni (H), più o meno la offerta o la domanda di finanziamenti, sono cioè misurati dall'espressione:

$$\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx} + F_x'$$

Se gli individui intendono *risparmiare*, bisogna distinguere diversi casi. Può darsi che, nello stesso tempo, abbiano convenienza a fare

nuovi investimenti — $\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx}' > 0$ — in beni (H): ed allora, se

il risparmio è superiore alla somma da investire, l'eccedenza viene ceduta ad interesse; se invece è inferiore, si copre la differenza mediante ricorso al prestito. Nel caso invece che fosse conveniente disin-

vestire, per quanto riguarda i beni (H) — $\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx}' < 0$ — si

offrirebbero ad interesse ambo le disponibilità: il risparmio e l'importo dei disinvestimenti.

E se si vuole *dissipare*? Anche in questo caso possono capitare diverse eventualità. Può darsi che gli individui abbiano convenienza a

disinvestire — $\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx}' < 0$ — per quanto riguarda i beni (H):

se queste disponibilità superano l'importo della dissipazione, in parte sono destinate al consumo ed in parte cedute ad interesse; se invece sono insufficienti a finanziare la dissipazione si copre la differenza me-

dianete ricorso al prestito (domanda di finanziamenti o di rimborsi). Può anche capitare che vi sia convenienza a fare nuovi investimenti in beni (H): allora si domanderanno finanziamenti per un importo uguale alla somma complessiva dei nuovi investimenti e della dissipazione.

Infine, se non v'è convenienza nè a dissipare, nè a risparmiare, i disinvestimenti netti sono ceduti interamente ad interesse, oppure gli investimenti netti vengono coperti interamente mediante domanda di finanziamenti. È in tal caso:

$$\sum_{j=1}^h P_{jx} H_{jx}' + F_x' = 0,$$

e quindi — v. la (14) — il consumo uguale al reddito monetario.

26. BENI DI GODIMENTO E BENI DA REDDITO. — Così è risolto anche un altro problema: quale parte dei beni (H) è posseduta allo scopo di consumarne i servizi e quale a scopo produttivo? Non dico quale quota di patrimonio è destinata al mantenimento di beni (H) a scopo di godimento e quale a scopo lucrativo, perchè, si è veduto, questi beni possono acquistarsi anche mediante finanziamenti.

Ebbene le (16) danno le quantità che conviene possedere ad ogni istante (H_{jx}) e che bisogna raggiungere mediante acquisti o vendite (H_{jx}'). E allora, se $H_{jx} > C_{jx}$, vuol dire che i beni j , posseduti nella misura H_{jx} , sono, all'istante τ , per una quantità C_{jx} beni di godimento e per il rimanente beni da reddito; in tal caso la corrispondente voce del bilancio (14) rappresenta appunto il prezzo riscosso per i servizi venduti. Se invece $H_{jx} < C_{jx}$, vuol dire che i beni perpetui j ($j=1, \dots, h$) posseduti sono tutti di godimento, insufficienti ai bisogni del consumatore, il quale però non ha convenienza ad investirvi una maggiore quantità di mezzi finanziari e preferisce procurarsi mediante locazione le rimanenti quantità di servizi di cui abbisogna; in tal caso la detta voce del bilancio è negativa e rappresenta la spesa per l'acquisto di tali eccedenze.

Le (16) permettono in proposito maggiori precisazioni qualora siano scritte nella forma:

$$(17) \quad p_{jx} = i_x p_{jx} + \frac{\partial M_x}{\partial H_{jx}} - p_{jx}, \quad j=1, \dots, h.$$

Il primo membro è il prezzo dei servizi dei beni (H) presi o ceduti in locazione ed il secondo il costo, per unità di tempo e di bene, dell'uso all'istante τ dell'ultima dose (infinitesima) dei beni (H) posseduti in proprietà, ossia il *costo marginale unitario dei loro servizi*.

Si può pertanto enunciare in altra forma il suesposto teorema suggerito dalle (16):

Ad ogni istante del programma dei consumatori, conviene investire in ciascun bene perpetuo in misura tale che il costo marginale dei suoi servizi ne eguagli il prezzo.

Infatti, essendo crescenti le spese di mantenimento, anche questo costo è crescente; e allora, fin quanto è inferiore al prezzo, nel caso che i servizi dei beni (H) posseduti in proprietà siano in parte consumati e in parte venduti ($H_{jx} > C_{jx}$), si risparmia sui primi e si consegue un lucro sui secondi; più oltre la cessione in locazione sarebbe passiva. Se invece sono tutti destinati al consumo ($H_{jx} < C_{jx}$), si risparmia rispetto alla spesa che si dovrebbe sostenere per acquistarli direttamente sul mercato; più oltre però, poichè il costo supera il prezzo, è proprio in questo modo che conviene procurarsi le maggiori quantità che si desidera consumare.

27. L'EQUILIBRIO GENERALE DEL MERCATO. — Il sistema di equazioni dell'equilibrio dei consumatori, studiato nel § 23, fornisce le C_{jx} e le F_x da introdursi nelle equazioni dell'equilibrio generale (10), (11) e (12). Fornisce inoltre i tassi effettivi di scambio dei beni (H), in funzione del saggio dell'interesse e dei prezzi dei servizi e dei beni (H), nonchè delle loro derivate.

Poichè questi beni non sono oggetto di produzione — come si è

supposto — alle altre equazioni dell'equilibrio dinamico generale bisogna aggiungere le seguenti:

$$(18) \quad \sum_{x=1}^X H_{jx}' = 0, \\ j=1, \dots, h,$$

in numero uguale alle altrettante nuove incognite P_j ($j=1, \dots, h$) ed esperimenti l'eguaglianza, ad ogni istante, per ciascun bene, della domanda e dell'offerta di mercato.

Le costanti d'integrazione relative alle P_j' vanno determinate con le condizioni che siano date le tendenze dei prezzi all'origine dei tempi: $P_j'(t_0) = P_{0j}'$, ($j=1, \dots, h$).

III. — I beni durevoli perpetui nelle imprese.

28. I VINCOLI AI BENI DUREVOLI. — Le imprese non domandano soltanto servizi di beni durevoli man mano che ne abbisognano, ma acquistano anche beni durevoli, ossia l'intero flusso di servizi che tali beni possono rendere. Vi sono beni durevoli che una volta acquistati si possono vendere quando si voglia, senza vincoli, realizzandone il valore al prezzo di mercato. Altri sono ugualmente liquidi, nel senso che si possono alienare ad ogni momento, ma danno un ricavo inferiore a questo prezzo, perchè il loro distacco dall'organismo aziendale importa un costo od anche perchè con tale distacco perdono in tutto o in parte la loro produttività. Ve ne sono altri infine che una volta incorporati nell'impresa non se ne possono separare se non dopo un periodo di più o meno lungo di tempo ¹⁾.

Questi vincoli ai beni produttivi durevoli impiegati nelle imprese esistono in misura più o meno rilevante, talvolta rilevantissima, in ogni

¹⁾ Sui vincoli ai beni durevoli si veggia: L. DE MINICO, *Elasticità e relazioni dinamiche dei costi nelle imprese industriali*, Napoli 1935, cap. I, II; E. SCHMALENBACH, *Grundlagen der Selbstkostenrechnung und Preispolitik*, Leipzig 1930, « Proportionale Kosten » pp. 32-33, e « Fixe Kosten » pp. 33-37.

campo della produzione. Devono avere una parte di prim'ordine nello studio della tecnica degli investimenti d'impresa.

Qui studierò la dinamica d'impresa, supponendo l'esistenza di beni durevoli perpetui suscettibili di scambio senza ostacoli e perciò completamente liquidi. In una successiva sezione considererò il caso di beni durevoli temporanei non suscettibili di scambio una volta acquistati, e quindi completamente vincolati. Non darò, al solito, una esauriente trattazione dell'argomento, limitandomi invece a scrivere e interpretare le equazioni dell'equilibrio dinamico e del moto storico nelle ipotesi formulate ²⁾.

29. TASSI D'INVESTIMENTO, DI SCAMBIO E DI PRODUTTIVITÀ. — Allorché i beni (H) siano suscettibili di scambio, le imprese possono trovare conveniente possederne in proprietà delle quantità a scopo produttivo, salvo ad alienarne una parte non appena si renda opportuno ridurne l'impiego. Come sono ora determinati i tassi d'investimento dei servizi di questi beni? Quanti servizi sono acquistati sul mercato e quanti sono invece forniti da beni propri? Quanti sono, ad ogni istante, i beni (H) posseduti e quanti quelli acquistati o venduti?

Sia $H_{jb_i}(t, \tau)$ la quantità del bene perpetuo j che, all'istante t , il produttore b_i conta di possedere al tempo $\tau \geq t$. Poichè, come si suppone, le imprese ad ogni istante investono interamente nella produzione i servizi dei beni posseduti, questo stesso simbolo misura anche il tasso, previsto, degli investimenti dei servizi dei beni (H) di proprietà. $H_{jb_i}'(t, \tau)$ — al solito l'apice indichi la derivata parziale rispetto a τ — è il tasso di scambio previsto di questi beni. Essendo $H_{jb_i}(t)$ le quantità possedute all'istante t , le quantità (previste) disponibili all'istante τ , tenuto conto degli acquisti e delle vendite da farsi fino a quel momento, sono:

$$H_{jb_i}(t, \tau) = H_{jb_i}(t) + \int_t^\tau H_{jb_i}'(t, \nu) d\nu,$$

$j=1, \dots, b.$

²⁾ V. le note (15) e (16) del cap. I.

Siano $Q_{jb_i}(t, \tau)$ i tassi previsti degli investimenti degli altri mezzi produttivi, ossia le quantità (per unità di tempo) di lavoro, ($j=0$), di servizi dei beni (H), ($j=1, \dots, h$), e di beni (M), ($j=h+1, \dots, h+m$), che, all'istante t , b_i conta di acquistare sul mercato e impiegare nella produzione al tempo $\tau \geq t$.

La determinazione degli investimenti dei servizi dei beni (H) presi in locazione e di quelli forniti dai beni di proprietà deve farsi su considerazioni marginali. Anche per le imprese si potrebbe tener conto del complesso di spese di amministrazione, fiscali, di manutenzione, riparazione e simili, richieste dai beni perpetui di proprietà, introducendo il concetto di « spesa di mantenimento », come fu fatto per le economie di consumo (§ 22); tuttavia, *per semplicità*, assumerò che i servizi dei beni (H) di proprietà abbiano un proprio tasso di produttività, distinto da quello dei servizi locati, ed indicherò con:

$$Y_{b_i}(t, \tau, Q_{0b_i}, \dots, Q_{h+m, b_i}, H_{1b_i}, \dots, H_{hb_i}),$$

i tassi totali previsti di produttività, ossia il prodotto (per unità di tempo) che gli imprenditori, all'istante t , prevedono di ottenere, al tempo $\tau + \omega_{b_i}$, dagli investimenti da farsi al momento τ . In funzione di τ , le Y_{b_i} rappresentano il modificarsi dei rendimenti della produzione nel futuro, a causa dei possibili perfezionamenti nella gestione industriale ed amministrativa dell'impresa, dei progressi della tecnica produttiva, dell'avvicinarsi delle stagioni e simili, quali sono previsti all'istante t ; in funzione di t , rappresentano il modificarsi di tali previsioni nel corso del tempo.

Infine, i prezzi previsti del lavoro, dei servizi dei beni (H) e dei beni (M) sono $p_{jb_i}(t, \tau)$, ($j=0, \dots, h+m$), quelli dei beni (H) $P_{jb_i}(t, \tau)$, ($j=1, \dots, h$), ed i relativi prezzi effettivi di mercato p_j e P_j . Il saggio previsto di interesse sia: $i_{b_i}(t, \tau)$.

30. IL PREVENTIVO TECNICO-ECONOMICO E GLI INVESTIMENTI. — Gli imprenditori possono limitarsi, ad ogni istante, a determinare i loro programmi per un intervallo piccolissimo di tempo e regolare così gli investimenti presenti. Nel caso che esistessero beni durevoli vincolati

(sez. V), o che una più complessa congiunzione tecnica legasse nel tempo il flusso degli investimenti ed il flusso dei prodotti (come, ad esempio, ove il tasso di produttività dipendesse anche dalle tendenze Q_{jbi}'), essi dovrebbero regolarsi, ad ogni istante, sulla base di più vasti piani di lavorazione, estesi a più lunghi periodi di tempo, fino all'intera durata prevista della vita dell'impresa. Dovrebbero cioè tener conto dell'intero flusso dei nuovi ricavi e dei nuovi costi rispettivamente da conseguire e da sopportare nel corso del periodo cui si estendesse la congiunzione tecnica degli investimenti.

Invece, nelle ipotesi qui assunte, i beni durevoli sono perfettamente liquidi ed i mezzi produttivi impiegati in un certo intervallo di tempo danno un prodotto, al termine della lavorazione, indipendente dagli investimenti eseguiti in precedenza, e non esercitano alcuna influenza sui rendimenti di quelli da farsi in avvenire. Gli imprenditori possono perciò, ad ogni istante, *correlare direttamente i ricavi ed i costi previsti* relativi agli investimenti da compiersi in un intervallo breve quanto si voglia di tempo e determinare questi investimenti con la condizione di massimo della differenza tra i valori attuali di tali ricavi e di tali costi.

Questa differenza, per le lavorazioni iniziate nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$, è la seguente:

$$\Gamma_{b_i}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \left[P_{h+1, b_i}(t, \tau + \omega_{b_i}) Y_{b_i} e^{-\int_t^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} + \right. \\ \left. - \left(\sum_{j=0}^{h+m} P_{j b_i} Q_{j b_i}' + \sum_{j=1}^h P_{j b_i} H_{j b_i}' \right) e^{-\int_t^{\tau} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} \right] d\tau,$$

da cui sono esclusi, perchè non correlativi agli investimenti da farsi nell'intervallo considerato, i costi sostenuti per l'acquisto dei beni (H)

attualmente posseduti (all'istante t), i costi sopportati per le lavorazioni in corso (quelle iniziate nell'intervallo $[t - \omega_{b_i}, t]$), nonché i ricavi attesi (nell'intervallo $[t, t + \omega_{b_i}]$) da tali lavorazioni.

Ad ogni istante t , bisogna determinare i valori, nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$, delle funzioni H_{jb_i} e Q_{jb_i} , che, insieme alle H_{jb_i}' , rendono massimo Γ_{b_i} . È un problema del calcolo delle variazioni, la cui soluzione (v. appendice III) fornisce le seguenti equazioni:

$$(19) \quad \begin{aligned} p_{h+i, b_j}(t, \tau + \omega_{b_i}) \frac{\partial Y_{b_j}}{\partial Q_{jb_i}} &= p_{jb_i} e^{\int_t^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} \\ & \quad j=0, \dots, h+m; \\ p_{h+i, b_j}(t, \tau + \omega_{b_i}) \frac{\partial Y_{b_j}}{\partial H_{jb_i}} &= (i_{b_i} p_{jb_i} - p_{jb_i}') e^{\int_t^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} \\ & \quad j=1, \dots, h, \quad \tau=(t, t + \Delta t), \end{aligned}$$

ove, si noti bene, è (v. § 29):

$$H_{jb_i} = H_{jb_i}(t) + \int_t^{\tau} H_{jb_i}' d\nu.$$

Le prime $1+h+m$ equazioni hanno lo stesso significato delle (5), benchè riferito all'istante τ , ed a quelle si riducono per $\tau = t$.

Nelle rimanenti il secondo membro è il *costo unitario previsto* (per unità di bene e di tempo), riferito al termine della produzione, $\tau + \omega_{b_i}$, dell'uso dei beni (H) di proprietà posseduti all'istante τ , ossia dei servizi dei medesimi da investirsi a questo momento. Tali equazioni hanno pertanto significato analogo alle precedenti. Le une e le altre possono porsi nella forma delle (6).

Le (19) esprimono dunque che le *condizioni di equilibrio degli investimenti*, enunciate in più modi nel § 14, devono essere verificate

in ciascun istante dell'intervallo $(t, t + \Delta t)$, cui si estendono i programmi di lavorazione ideati al tempo t . Sono $l+h+m+h$ equazioni indipendenti, atte a determinare le altrettante incognite Q_{jb_i} e H_{jb_i} in questo intervallo. Il prodotto, previsto, è dato dalla Y_{b_i} (§ 29).

Gli imprenditori passano immediatamente all'applicazione dei loro programmi, salvo a rifarli daccapo subito dopo, al primo modificarsi di dati e previsioni; domandano infatti sul mercato le quantità:

$$Q_{jb_i}(t) = Q_{jb_i}(\tau=t),$$

$j = 0, \dots, h+m,$

di lavoro, di servizi dei beni (H) e dei beni (M); e domandano od offrono, a quello stesso momento, le quantità:

$$H_{jb_i}'(t) = H_{jb_i}'(\tau=t),$$

$j = 1, \dots, h,$

dei beni (H).

Sono questi i tassi di scambio dei beni e servizi — funzioni, al solito, attraverso le previsioni, dell'interesse, dei prezzi di mercato e delle loro tendenze — da introdursi nelle equazioni dell'equilibrio dinamico generale (§ 33).

Si possono ora determinare le quantità dei beni (H) posseduti dalle imprese, ad ogni istante t — dati del loro problema a questo momento — quali risultano dalle quantità disponibili all'origine dei tempi t_0 , H_{0jb_i} , e dagli acquisti e dalle vendite effettuate fino a questo momento. Sono:

$$H_{jb_i}(t) = H_{0jb_i} + \int_{t_0}^t H_{jb_i}' dv,$$

$j = 1, \dots, h,$
 $b_i = 1, \dots, B_i; i = 1, \dots, m.$

31. IL REDDITO DA RIPARTIRE. — La misura del reddito da ripartire, come fu già accennato (§ 15), dipende dai criteri adottati. Si supponga che le imprese ripartiscano, ad ogni istante (t) , la differenza fra i ricavi ottenuti dalla vendita dei prodotti finiti ed i costi ad essi ritenuti correlativi, pari al prezzo d'acquisto dei beni (M) e dei servizi

investiti (all'istante $t - \omega_{b_i}$), più gli interessi (per unità di tempo) pagati a quel momento sul valore dei beni (H) posseduti, più ancora gli interessi su questi elementi di costo per la durata del periodo produttivo. Bisogna poi tener conto degli incrementi, positivi o negativi, di valore dei beni (H). Questi incrementi — suppongo ancora — vengono ripartiti quotidianamente fra i consumatori partecipanti, nell'intervallo medesimo in cui si verificano, a rettifica dei risultati lordi della gestione.

Il conto del reddito da ripartire, essendo:

$Y_{b_i} [t, Q_{ob_i} (t - \omega_{b_i}), \dots, Q_{h+m, b_i} (t - \omega_{b_i}), H_{1b_i} (t - \omega_{b_i}), \dots, H_{hb_i} (t - \omega_{b_i})]$
 il *tasso effettivo totale di produttività* degli investimenti effettuati all'istante $t - \omega_{b_i}$, risulta allora:

$$(20) \quad R_{b_i} = p_{h+i} Y_{b_i} + \sum_{i=1}^h P_i^* H_{jb_i} - \left[\sum_{j=0}^{h+m} p_j (t - \omega_{b_i}) Q_{jb_i} (t - \omega_{b_i}) + \right. \\ \left. + i (t - \omega_{b_i}) \sum_{j=1}^h P_j (i - \omega_{b_i}) H_{jb_i} (t - \omega_{b_i}) \right] e^{\int_{t - \omega_{b_i}}^t i(v) dv}$$

32. IL BILANCIO FINANZIARIO. — Resta da redigere il bilancio finanziario, ossia il conto di cassa da chiudersi, ad ogni istante, con una offerta di rimborsi o una domanda di finanziamenti, secondo che le entrate superino o siano superate dalle uscite.

Vi sono ora due nuove voci (v. § 16): l'incremento di valore dei beni (H) posseduti, da regolarsi con i consumatori partecipanti, già compreso nella voce R_{b_i} , ed il prezzo dei beni (H) acquistati o venduti. L'importo (per unità di tempo) dei nuovi finanziamenti domandati o dei rimborsi offerti è quindi:

$$(21) \quad F_{b_i}' = \sum_{j=0}^{h+m} p_j Q_{jb_i}' + \sum_{j=1}^h P_j H_{jb_i}' + i F_{b_i} + R_{b_i} - p_{h+i} Y_{b_i},$$

in cui agli ultimi due termini può sostituirsi la loro somma algebrica data dalla (20).

Qual'è il valore della F_{b_i} ? Questa comprende anzitutto l'importo dei beni (M) e dei servizi acquistati e investiti nell'intervallo $(t - \omega_{b_i}, t)$, aumentato degli interessi per il tempo trascorso. Vi sono poi i finanziamenti per il mantenimento dei beni durevoli perpetui. Poichè nel passato ne sono stati sempre pagati ai consumatori partecipanti gli incrementi positivi di valore e riscossi quelli negativi (§ 31), l'importo dei finanziamenti relativi a questi beni è ad ogni momento eguale al loro valore di mercato. Vi sono infine gli interessi pagati nell'intervallo $(t - \omega_{b_i}, t)$ su tale importo, in attesa di impu-
tazione ai prodotti da ottenersi nel periodo $(t, t + \omega_{b_i})$. È pertanto:

$$(22) \quad F_{b_i} = \int_{t - \omega_{b_i}}^t \left[\sum_{j=0}^{h+m} P_j(\nu) Q_{jb_i}(\nu) + \sum_{j=1}^h P_j(\nu) H_{jb_i}(\nu) \right] e^{\int_{\nu}^t i(\mu) d\mu} d\nu + \sum_{j=1}^h P_j H_{jb_i}$$

Può riscontrarsi come la (22) sia l'integrale della (21), modificata mediante la (20) nel modo anzidetto. La (21) può anche scriversi sostituendo alla F_{b_i} il suo valore dato dalla (22).

La F_{b_i} , oltre che il debito totale delle imprese, misura anche la somma dei costi sopportati nel passato che attendono i correlativi ricavi³⁾, da ottenersi mediante la vendita dei prodotti nell'intervallo $(t, t + \omega_{b_i})$ e dei beni (H) posseduti allorquando sarà conveniente.

33. L'EQUILIBRIO GENERALE DEL MERCATO. — Nei §§ 30 e 31 sono stati determinati i nuovi valori delle Q_{jb_i} , Y_{b_i} e R_{b_i} da introdursi rispettivamente nelle (10) e (11), nelle (11) e nelle (13) dell'equilibrio generale; la (21) dà le F_{b_i} che compaiono nelle (12), ($b_i = 1, \dots, B_i$; $i = 1, \dots, m$).

³⁾ V. la nota (21) del cap. I.

Ora devo scrivere h nuove equazioni occorrenti per determinare gli altrettanti prezzi di mercato dei beni (H), P_j ($j=1, \dots, h$). Sono:

$$(23) \quad \sum_{x=1}^X H_{jx}' + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} H_{jb_i}' \right) = 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Ho introdotto nelle (18) la domanda o l'offerta netta dei produttori (§ 30).

Volendo supporre che i beni (H) siano anch'essi suscettibili di produzione, può assumersi che vengano fabbricati secondo lo schema, semplice, finora considerato; nella (23) deve allora inserirsi un altro termine indicante l'offerta delle imprese produttrici.

Può anche supporre che la fabbricazione di un dato bene perpetuo richieda l'impiego di quantità di altri beni (H) — trasformazioni fondiarie, edilizie, di impianti industriali e simili —, oltre che dei loro servizi. Dovranno allora determinarsi i tassi di investimento di questi beni nella produzione di ciascuno di essi e nella (23) bisognerà introdurre anche le quantità domandate a tale scopo dalle imprese.

IV. — Gli strumenti nelle economie di consumo.

34. VINCOLI AI BENI DUREVOLI TEMPORANEI. — I beni di consumo ed i mezzi di produzione fin qui considerati sono stati o servizi o beni non durevoli, oppure beni durevoli perpetui suscettibili di scambio ad ogni momento senza alcun ostacolo. Tutti beni liquidi, insomma. Ora passo a studiare come, ad ogni istante, si stabilisca l'equilibrio del mercato, attraverso il reciproco adattamento degli equilibri dinamici singoli di consumatori ed imprese, nel caso che esistano *beni durevoli temporanei* — strumenti — completamente vincolati, e precisamente beni che, una volta acquistati ed entrati nelle economie consumatrici o produttrici, non se ne possono più distaccare e che rendono un flusso rigido di servizi, non modificabile nel tempo, per cui uno strumento di durata σ , acquistato all'istante t , dà un flusso costante di servizi nel-

l'intervallo $(t, t+\sigma)$, al termine del quale si logora interamente, sia stato o non usato a scopo consuntivo o produttivo ⁴⁾. Inoltre si ammette che non sia possibile alienare i servizi esuberanti degli strumenti posseduti, nè procurarsene degli altri. In altri termini, sul mercato non si negoziano nè strumenti usati, nè servizi di strumenti.

Questi beni, suppongo ancora, sono scambiabili e utilizzabili anche per frazioni infinitesime ed hanno una durata diversa da individuo a individuo e da impresa ad impresa, ma costante nel tempo per ciascun soggetto economico.

Esistano s specie di strumenti, una delle quali si indichi genericamente con u ($u=1, \dots, s$).

Di beni soggetti a vincoli di questo genere ce ne sono nelle economie di consumo, ma è nelle imprese che ne esistono in misura particolarmente rilevante, con conseguenze economiche di vastissima portata.

35. LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO DINAMICO. — Come viene ora determinata la condotta dei consumatori? Quali sono le nuove condizioni d'equilibrio dei consumi nei programmi per l'avvenire? Qual'è la quantità di strumenti che hanno convenienza ad acquistare, ad ogni istante, sul mercato?

Sia $s_{ux}(t, \tau)$ il tasso previsto d'acquisto dello strumento u , ossia la quantità, per unità di tempo, di questo bene che, all'istante t , si prevede di acquistare al tempo $\tau \geq t$. Per $\tau < t$, s_{ux} rappresenta gli acquisti fatti nel passato e quindi noti all'istante t .

Se gli strumenti hanno una durata σ_{ux} , all'istante t si deve prevedere che al tempo τ saranno disponibili, benchè in diverso stato di logoramento, tutti quelli acquistati nell'intervallo $(\tau - \sigma_{ux}, \tau)$ in numero di:

$$(24) \quad S_{ux}(t, \tau) = \int_{\tau - \sigma_{ux}}^{\tau} s_{ux}(t, \nu) d\nu, \quad u = 1, \dots, s.$$

⁴⁾ Sui vincoli ai beni durevoli v. § 28.

Le quantità storicamente possedute sono: $S_{ux}(t) = S_{ux}(\tau=t)$. S_{ux} e S_{ux} designano anche le quantità di servizi (per unità di tempo) disponibili per il consumo.

I prezzi previsti degli strumenti siano $P_{ux}(t, \tau)$ e quelli di mercato $P_u(t)$, ($u=1, \dots, s$).

Nel bilancio del consumatore bisogna ora introdurre una nuova voce: la spesa occorrente per l'acquisto di questi beni. Pertanto la (1) si riscriverà:

$$(25) \quad \sum_{j=0}^h p_{jx}(H_{jx} - C_{jx}) + i_x F_x + R_x - \sum_{u=1}^s P_{ux} s_{ux} - \sum_{j=h+1}^{h+m} p_{jx} C_{jx} - F_x' = 0.$$

Mantengo l'ipotesi che i beni (H) non siano suscettibili di scambio, prescindendo dall'estensione della sezione II del presente capitolo.

La somma totale di soddisfazioni che x prevede, all'istante t , di ottenere nel corso previsto della sua esistenza è:

$$U_{vx} = \int_t^{v_x} U_x(t, \tau) C_{0x}, \dots, C_{h+m,x}, S_{1x}, \dots, S_{sx} d\tau.$$

Il problema del consumatore, ad ogni istante t , consiste nel determinare i valori, nell'intervallo $\tau = (t, v_x)$, delle funzioni C_{jx} ($j=0, \dots, h+m$), S_{ux} e quindi s_{ux} ($u=1, \dots, s$) e F_x , legate dalla (25), che rendono massimo U_{vx} con le condizioni (v. §§ 6 e 7):

$$(26) \quad F_x(t, \tau)_{(\tau=t)} = F_x(t), \quad F_x(t, \tau)_{(\tau=v_x)} = 0.$$

Il calcolo delle variazioni (v. appendice IV) fornisce le seguenti equazioni:

$$(27) \quad \frac{1}{p_{jx}} \frac{\partial U_x}{\partial C_{jx}} = u_x(t) e^{-\int_t^{\tau} i_x(t, v) dv}$$

$j=0, \dots, h+m;$

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P_{ux}} \int_{\tau}^{\tau + \sigma_{ux}} \frac{\partial U_x}{\partial S_{ux}(t, \nu)} d\nu = u_x(t) e^{-\int_t^{\tau} i_x(t, \nu) d\nu} \\ \frac{1}{P_{ux}} \int_{\tau}^{\nu_x} \frac{\partial U_x}{\partial S_{ux}(t, \nu)} d\nu = u_x(t) e^{-\int_t^{\tau} i_x(t, \nu) d\nu} \end{array} \right. \begin{array}{l} t < \tau < \tau + \sigma_{ux} \\ \nu_x - \sigma_{ux} < \tau < \nu_x \\ u = 1, \dots, s; \end{array}$$

le quali, insieme alla (25) ed alle (26), risolvono il problema, determinando anche la u_x e la costante d'integrazione relativa alla F_x .

36. L'EQUILIBRIO DEI CONSUMI. — Il significato delle (27) è ben noto. Le (28) rappresentano le condizioni di equilibrio, relative agli strumenti, nei programmi individuali. La S_{ux} , che appare nel primo integrale di queste equazioni, è la quantità totale di strumenti esistente ad ogni momento ν dell'intervallo $(\tau, \tau + \sigma_{ux})$. Questo integrale rappresenta dunque la somma dei tassi marginali d'utilità dei servizi che gli strumenti acquistati all'istante τ forniranno, nell'intervallo $(\tau, \tau + \sigma_{ux})$, insieme a quelli già posseduti a quel momento o da acquistarsi nel corso dell'intervallo stesso; rappresenta, in altri termini, la somma dei tassi marginali d'utilità dei servizi della totalità degli strumenti esistenti ad ogni momento dell'intervallo. Per brevità chiamo tale valore *tasso marginale di utilità degli strumenti* (al tempo τ). La stessa denominazione può estendersi al secondo integrale delle (28): qui però si fa conto dei soli servizi utilizzabili fino al momento ν_x .

Il tasso marginale d'utilità degli strumenti, diviso per il loro prezzo, dà il *tasso marginale ponderato d'utilità di questi beni* (utilità marginale per unità di lira spesa).

Dato t , le (27) e le (28) forniscono le *leggi di equilibrio dei consumi* nei programmi ideati a questo istante. Esse significano che, in un intervallo $(\tau, \tau + d\tau)$, la spesa deve ripartirsi fra i diversi beni di consumo (lavoro, servizi dei beni (H), servizi e beni (M) e strumenti) in modo da eguagliare i tassi marginali ponderati d'utilità (essendo definiti nel modo anzidetto quelli degli strumenti).

In funzione di τ , queste equazioni danno l'equilibrio dei consumi nel corso $(\tau = [t, v_x])$ dei programmi individuali: i tassi marginali ponderati di utilità di tutti i beni, eguali fra loro, devono essere decrescenti, nel tempo, secondo la legge del valore attuale di una costante riferito all'istante in cui si procede alle scelte.

Si ritrovano così, salvo evidenti differenze di contenuto, le leggi di equilibrio enunciate nel § 8.

Infine, col variare di t , le stesse equazioni rappresentano il modificarsi di queste leggi nel corso del tempo — in funzione dei prezzi di mercato e delle loro tendenze, contenute nei prezzi previsti — a causa del mutare dei gusti e dell'intensità delle valutazioni dell'utilità dei consumi previsti, nonché delle previsioni sul comportamento futuro dei prezzi e dell'interesse.

Come già fu detto, quanto più piccola è la $u_x(t)$, tanto più bassi sono i tassi marginali ponderati d'utilità e quindi tanto più elevato è il tenor di vita previsto. La grandezza di questa costante viene determinata per mezzo della (25) e delle (26), in cui si contengono gli elementi della situazione economica individuale.

Queste ultime, come nel § 10, possono essere sostituite da una unica equazione integrale, simile alla (6), esprimente, per ogni istante t , l'eguaglianza del valore attuale della spesa da farsi nel presente e nel futuro per tutti i consumi — compreso quella per l'acquisto degli strumenti — con il patrimonio posseduto a quell'istante.

37. I CONSUMI, I FINANZIAMENTI E LA DOMANDA DI STRUMENTI. — Al solito, gli individui regolano ad ogni istante la loro condotta in base al programma in quel momento concepito. Consumano perciò le quantità: $C_{jx} = C_{jx}(\tau-1)$, ($j=0, \dots, h+m$), dei diversi beni e servizi,

offrono o domandano: $H_{jx} - C_{jx}$, ($j=0, \dots, h$), di lavoro e di servizi dei beni (H), domandano C_{jx} , ($j=h+1, \dots, h+m$), di beni (M), ed offrono o domandano finanziamenti per: $F_x' = F_x'(\tau=t)$.

E quanti strumenti acquistano? Con le $S_{ux}(t, \tau)$ sono determinate, nell'intervallo $\tau = (t, v_x)$, anche le $s_{ux} - v$. la (24) —, ossia i tassi previsti d'acquisto di questi beni; i relativi tassi attuali sono allora:

$$s_{ux}(t) = s_{ux}(t, \tau)_{\tau=t} \quad u=1, \dots, s.$$

Sono questi i nuovi tassi storici di scambio — funzione ciascuno dei prezzi di mercato e delle loro tendenze ($p_j, p_j', P_u, P_u', i, i'$) — da introdursi nelle equazioni dell'equilibrio generale (§§ 17 e 38).

L'incremento positivo o negativo (per unità di tempo) degli strumenti posseduti è pari all'importo degli acquisti fatti all'istante considerato, meno gli strumenti che a questo momento cessano dall'uso; è cioè:

$$S_{ux}'(t) = s_{ux}(t) - s_{ux}(t - \sigma_{ux}),$$

come si può anche riscontrare dalla (24) derivando rispetto a τ e ponendo $\tau = t$.

38. L'EQUILIBRIO GENERALE DEL MERCATO. — Nell'equilibrio generale bisogna ora introdurre un nuovo gruppo di equazioni, rappresentante l'eguaglianza, ad ogni istante, della domanda di strumenti da parte dei consumatori con l'offerta delle imprese produttrici.

Suppongo che la produzione di questi beni abbia luogo secondo lo schema fin qui considerato. Sia B_i il numero delle imprese fabbricanti lo strumento u e b_i una di esse ($b_i = 1, \dots, B_i; i = m+u; u = 1, \dots, s$). L'offerta da parte di b_i sia: Y_{b_i} ($i = m+u$). Le condizioni di uguaglianza della domanda e dell'offerta, necessarie alla determinazione delle altrettante nuove incognite $P_u(t)$, sono quindi:

$$(29) \quad \sum_{x=1}^X s_{ux} - \sum_{b_i=1}^{B_i} Y_{b_i} = 0, \quad i = m+u; u = 1, \dots, s.$$

Nelle altre equazioni dell'equilibrio generale bisogna tener conto dell'aumentato numero di imprese. La domanda di lavoro, di servizi dei beni (H) e di beni e servizi (M) da parte dei produttori diventa:

$$\sum_{i=1}^{m+s} \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} Y_{ib_i} \right),$$

$j=0, \dots, h+m;$

e la domanda di nuovi finanziamenti o l'offerta di rimborsi:

$$\sum_{i=1}^{m+s} \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} F_{b_i}' \right)$$

da sostituirsi rispettivamente nelle (10), (11) e (12).

V. — Gli strumenti nelle imprese.

39. L'IMPOSTAZIONE DINAMICA DEL PROBLEMA. — Il problema dinamico delle imprese, nel caso dell'esistenza di strumenti, non muta d'impostazione: bisogna mostrare come vengano determinati, ad ogni istante, i tassi d'acquisto e quelli d'investimento dei diversi beni e servizi produttivi, il reddito da ripartire e la domanda di nuovi finanziamenti oppure l'offerta di rimborsi. In particolare, bisogna mettere in rilievo quale parte abbiano in proposito il prezzo, il carico d'interessi e la produttività degli strumenti.

Considero il caso già precisato (§ 34) di strumenti interamente vincolati.

I produttori nell'acquistarne, all'istante t , una certa quantità di durata σ devono tener conto della produttività del flusso di servizi che renderanno nell'intervallo $(t, t+\sigma)$ e che, impiegati insieme agli altri mezzi di produzione, daranno un flusso di prodotti nell'intervallo $(t+\omega, t+\omega+\sigma)$. Ma bisogna tener conto anche degli strumenti acquistati precedentemente ed a quel momento non ancora logori. Si potrebbe allora pensare che convenga accrescere, all'istante t , gli acquisti di strumenti

nuovi fin quando il prodotto marginale previsto che i loro servizi daranno nell'intervallo $(t + \omega, t + \omega + \sigma)$ — essendo impiegati insieme a quelli degli strumenti già posseduti — non abbia un valore attuale pari al loro prezzo d'acquisto a quell'istante.

Ma il ragionamento non è corretto. Non funzioneranno questi beni insieme ai nuovi da acquistarsi nel corso dell'intervallo $(t, t + \sigma)$. E questi ultimi non lavoreranno a loro volta nell'intervallo $(t + \sigma, t + 2\sigma)$, insieme a quelli che si acquisteranno in questo periodo; e così continuando? Pertanto per determinare, ad ogni istante, gli acquisti e gli investimenti degli strumenti e degli altri mezzi produttivi, i produttori non possono più, come nei casi fin qui studiati di beni completamente liquidi, limitare le loro previsioni e i loro calcoli ad un intervallo brevissimo di tempo e neppure ad un periodo pari alla durata degli strumenti, ma devono guardare più lontano nell'avvenire e concepire un programma produttivo esteso all'intera durata prevista della vita dell'impresa.

Così ad un dato istante. In un successivo momento nuove esperienze si acquistano, nuovi fatti e nuove previsioni intervengono ed i produttori, al solito, rivedono la loro condotta e rifanno da capo i loro calcoli ed i loro piani.

40. IL PIANO TECNICO ED ECONOMICO DEGLI INVESTIMENTI. — Sia $s_{ub_i}(t, \tau)$ il tasso secondo cui il produttore b_i fa conto, all'istante t , di procedere all'acquisto di strumenti al momento $\tau \geq t$ ($u = 1, \dots, s$). Per $\tau < t$, s_{ub_i} rappresenta gli acquisti fatti nel passato e quindi noti all'istante t .

Poichè gli strumenti acquistati anteriormente all'istante $\tau - \sigma_{ub_i}$ sono al momento τ interamente logori, le quantità che al tempo t si prevede di possedere al momento τ risultano:

$$(30) \quad S_{ub_i}(t, \tau) = \int_{\tau - \sigma_{ub_i}}^{\tau} s_{ub_i}(t, \nu) d\nu, \\ u = 1, \dots, s.$$

Questo simbolo indica anche quantità di servizi disponibili e da investire nella produzione. Le quantità effettivamente possedute all'istante t sono:

$$S_{ub_i}(t) = S_{ub_i}(\tau=t)$$

I prezzi previsti degli strumenti siano $P_{ub_i}(t, \tau)$ e quelli di mercato $P_u(t)$. I tassi previsti d'acquisto e d'investimento degli altri mezzi produttivi ed i loro prezzi previsti sono, è noto: $Q_{jb_i}(t, \tau)$ e $p_{jb_i}(t, \tau)$ ($j=0, \dots, h+m$).

Il tasso totale di produttività, previsto all'istante t , degli investimenti di beni e servizi (compresi quelli degli strumenti) da compiersi all'istante $\tau \geq t$, ossia il prodotto (per unità di tempo) previsto per il momento $\tau + \omega_{b_i}$, è:

$$Y_{b_i}(t, \tau, Q_{0b_i}, \dots, Q_{h+m, b_i}, S_{1b_i}, \dots, S_{sb_i}).$$

Il problema dei produttori, ad ogni istante t , consiste nella determinazione dei flussi degli investimenti Q_{jb_i} e S_{ub_i} , e quindi dei tassi d'acquisto s_{ub_i} ($j=0, \dots, h+m$; $u=1, \dots, s$), che rendono massima la differenza tra il valore attuale dei ricavi ed il valore attuale dei costi, rispettivamente da conseguire e da sopportare nel corso della vita dell'impresa — il cui termine previsto indico con $v_{b_i}(t)$ — in relazione ai nuovi investimenti da effettuare in questo periodo; e cioè:

$$\Gamma_{b_i}(t) = \int_t^{v_{b_i} - \omega_{b_i}} \left[p_{h+i, b_i}(t, \tau + \omega_{b_i}) Y_{b_i} e^{-\int_t^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} - \left(\sum_{j=0}^{h+m} p_{jb_i} Q_{jb_i} + \sum_{u=1}^s P_{jb_i} s_{ub_i} \right) e^{-\int_t^{\tau} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} \right] d\tau.$$

Gli investimenti cessano al tempo $v_{b_i} - \omega_{b_i}$, perchè i prodotti possono ottenersi fino all'istante v_{b_i} .

La Γ_{b_i} esclude, perchè sottratti ad ogni scelta di convenienza, i costi sostenuti per gli strumenti acquistati nel passato e tutt'ora esistenti (all'istante t), i costi sopportati per le lavorazioni in corso, iniziate nell'intervallo $(t - \omega_{b_i}, t)$, nonchè i loro ricavi attesi nell'intervallo $(t, t + \omega_{b_i})$. Tali costi e tali ricavi non mancheranno tuttavia di prender parte alla determinazione del reddito dei relativi prodotti. Entrano invece nella Γ_{b_i} i mezzi di produzione che quei costi acquisirono all'impresa e che, all'istante t , non hanno resi tutti i servizi di cui sono capaci, vale a dire gli strumenti acquistati nell'intervallo $(t - \sigma_{ub_i}, t)$.

Bisogna determinare, ad ogni istante t , i valori, nell'intervallo $(t, v_{b_i} - \omega_{b_i})$, delle funzioni Q_{jb_i} e S_{ub_i} che insieme alle s_{ub_i} rendono massima Γ_{b_i} . È un problema del calcolo delle variazioni, la cui soluzione (appendice V) fornisce le seguenti equazioni:

$$(31) \quad p_{h+i, b_i}(t, \tau + \omega_{b_i}) \frac{\partial Y_{b_i}}{\partial Q_{jb_i}} e^{-\int_{\tau}^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, v) dv} = p_{jb_i},$$

$t \leq \tau \leq v_{b_i} - \omega_{b_i}$
 $j = 1, \dots, h + m,$

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau + \sigma_{ub_i}} p_{h+i, b_i}(t, v + \omega_{b_i}) \frac{\partial Y_{b_i}}{\partial S_{ub_i}(t, v)} e^{-\int_{\tau}^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \mu) d\mu} dv = P_{ub_i}, \\ & \int_{\tau}^{v_{b_i} - \omega_{b_i}} p_{h+i, b_i}(t, v + \omega_{b_i}) \frac{\partial Y_{b_i}}{\partial S_{ub_i}(t, v)} e^{-\int_{\tau}^{\tau + \omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \mu) d\mu} dv = P_{ub_i}, \end{aligned} \right.$$

$t \leq \tau \leq v_{b_i} - \omega_{b_i} - \sigma_{ub_i}$
 $v_{b_i} - \omega_{b_i} - \sigma_{ub_i} \leq \tau \leq v_{b_i} - \omega_{b_i}$
 $u = 1, \dots, s.$

41. L'EQUILIBRIO DINAMICO DEGLI INVESTIMENTI. — Le (31) hanno il significato delle (5) riferito all'istante τ del piano produttivo.

Le (32) sono le condizioni di equilibrio relative agli strumenti nello stesso piano. La S_{ub_i} che appare nel primo integrale di queste equazioni è la quantità totale di strumenti esistenti ad ogni momento v dell'intervallo $(\tau, \tau + \sigma_{ub_i})$. Questo integrale rappresenta dunque il valore, riferito all'istante τ , della somma dei tassi marginali di produttività dei servizi che gli strumenti da acquistarsi all'istante τ forniranno nell'intervallo $(\tau, \tau + \sigma_{ub_i})$, insieme a quelli già posseduti a questo momento o da acquistare successivamente; rappresenta in altri termini la somma dei tassi marginali di produttività dei servizi della totalità degli strumenti esistenti ad ogni momento dell'intervallo. Per brevità ed a somiglianza di quanto ho fatto in condizioni analoghe nella precedente sezione (§ 36), chiamo tale somma *valore del tasso marginale di produttività degli strumenti* (all'istante τ). La stessa denominazione può estendersi al secondo integrale delle (32): qui però bisogna far conto dei soli servizi conseguibili nell'intervallo $(\tau, v_{b_i} - \omega_{b_i})$, giacchè, cessando all'istante v_{b_i} la vita dell'impresa, gli ultimi investimenti potranno farsi fino al tempo $v_{b_i} - \omega_{b_i}$, onde gli strumenti non ancora logori a quel momento rimarranno inutilizzati.

Per le (32) può dunque enunciarsi il seguente teorema:

Nei piani ideati ad ogni istante i produttori fanno conto di acquistare ciascuna specie di strumenti, ad ogni momento della vita (prevista) dell'impresa, per una quantità tale da eguagliarne il valore del tasso marginale di produttività al prezzo di mercato (previsto) a questo stesso momento.

Dividendo le (31) per p_{jb_i} si ottiene, al primo membro, il valore, all'istante τ , del tasso marginale ponderato di produttività del bene o servizio j ($j = 0, \dots, h'+m$). Similmente dividendo le (32) per P_{ub_i} si ha, al primo membro, il valore del *tasso marginale ponderato di produttività degli strumenti*, ossia il valore, riferito all'istante τ , per unità di tempo e di moneta, del prodotto ottenuto dall'ultima dose (infinitesima) di lira spesa a quel momento nell'acquisto di questi beni. Poste in questa forma le (31) e le (32) unitamente permettono di esprimere

così, brevemente, le condizioni dell'equilibrio dinamico degli investimenti:

Nei piani ideati ad ogni istante, i produttori fanno conto di acquistare ciascuna specie di beni, servizi e strumenti, ad ogni momento della vita (prevista) dell'impresa, per una quantità tale da eguagliarne, fra loro e con l'unità di spesa, i valori dei tassi marginali ponderati di produttività, a quello stesso momento.

In funzione di t le (31) e le (32) rappresentano il modificarsi incessante dei piani produttivi nel corso del tempo, in un col mutare delle condizioni d'impresa e di mercato.

Al solito i produttori regolano ad ogni istante la loro condotta in base al programma in quel momento concepito. Domandano perciò le quantità: $Q_{jb_i} = Q_{jb_i}(\tau = t)$ ($j = 0 \dots, h+m$), di lavoro, servizi dei beni (H) e beni (M). E quanti strumenti acquistano? Con le $S_{ub_i}(t, \tau)$ sono determinate, nell'intervallo $(t, v_{b_i} - \omega_{b_i})$, anche le $s_{ub_i} - v$. la (30) — i tassi d'acquisto previsti di questi beni; i relativi tassi storici sono allora:

$$s_{ub_i}(t) = s_{ub_i}(\tau = t),$$

$$u = 1, \dots, s.$$

L'incremento, positivo o negativo, per unità di tempo, degli strumenti posseduti è pari agli acquisti fatti all'istante considerato, meno gli strumenti che a questo momento cessano dall'uso; è cioè:

$$S_{ub_i}'(t) = s_{ub_i}(t) - s_{ub_i}(t \cdot \sigma_{ub_i}),$$

come si può anche riscontrare dalla (30) derivando rispetto a τ e ponendo $\tau = t$.

42. AMMORTAMENTI E REDDITO DA RIPARTIRE. — Si è già accennato (§ 15) alla distinzione fra reddito conseguito e reddito da ripartire. Poichè lo scopo del presente lavoro è quello di dare una qualche trattazione matematica e dinamica di alcuni dei maggiori aspetti della realtà economica, non una teoria esauriente dei medesimi, salto a piè pari ogni questione riguardante le valutazioni d'impresa ai fini della de-

terminazione del reddito — oggetto di profonde meditazioni da parte della Scuola italiana di Economia aziendale ⁵⁾ — e suppongo per semplicità che gli utili da ripartire siano computati, ad ogni istante, nella misura pari alla differenza fra il ricavo ottenuto dalla vendita dei prodotti finiti, a quel momento, ed il costo dei capitali circolanti e dei servizi dei capitali fissi (strumenti) che vi furono impiegati.

Ove si volesse fondare la determinazione degli utili da ripartire sulla redditività prospettiva dell'impresa ⁶⁾, bisognerebbe basarsi sul piano tecnico ed economico regolante gli investimenti, tenendo conto dei costi sospesi e dei ricavi da conseguirsi che non vi sono compresi (§ 40).

Il prodotto ottenuto, all'istante t , dagli investimenti compiuti al momento $t - \omega_{b_i}$, sia:

$$Y_{b_i} \left[t, Q_{ob_i}(t - \omega_{b_i}), \dots, Q_{h+m.b_i}(t - \omega_{b_i}), S_{1b_i}(t - \omega_{b_i}), \dots, S_{sb_i}(t - \omega_{b_i}) \right].$$

Il costo dei capitali circolanti, ossia del lavoro, dei servizi dei beni (H) e dei beni (M), è:

$$\Theta_{cb_i}(t) = \sum_{j=0}^{h+m} p_j(t - \omega_{b_i}) \bar{Q}_{jb_i}(t - \omega_{b_i}) e^{\int_{t - \omega_{b_i}}^t i(v) dv}.$$

Circa i costi relativi ai servizi degli strumenti suppongo che le quote d'ammortamento vengano computate ripartendo il prezzo di acquisto di ciascuno strumento in parti uguali tra i suoi servizi ed aggiungendo a questa somma gli interessi dal momento dell'acquisto a quello della vendita dei prodotti in cui i servizi vennero investiti.

⁵⁾ G. ZAPPA, *La determinazione del reddito nelle imprese commerciali*, Roma 1920-1929; L. DE MINICO, *Rinnovamento e liquidità del capitale nelle imprese industriali*, Napoli 1931; P. ONIDA, *Il bilancio delle aziende commerciali*, Milano 1934; L. DE MINICO, *Elasticità e relazioni dinamiche dei costi nelle imprese industriali*, Napoli 1935.

⁶⁾ L. DE MINICO, *Elasticità e relazioni dinamiche dei costi nelle imprese industriali*, Napoli 1935; P. ONIDA, *Il bilancio delle aziende commerciali*, Milano 1934.

Calcolo ora con questo criterio la quota totale di ammortamento del capitale fisso da imputarsi al prodotto ottenuto all'istante t . I servizi investiti al tempo $t - \omega_{b_i}$ sono quelli di tutti gli strumenti a quel momento esistenti, acquistati nell'intervallo $(t - \omega_{b_i} - \sigma_{ub_i}, t - \omega_{b_i})$. La quota d'ammortamento degli strumenti acquistati all'istante v è:

$$\frac{1}{\sigma_{ub_i}} P_u(v) s_{ub_i}(v) e^{-\int_v^t i(\mu) d\mu},$$

e quella di tutti gli strumenti esistenti all'istante $t - \omega_{b_i}$:

$$\Theta_{fb_i}(t) = \sum_{u=1}^s \left[\frac{1}{\sigma_{ub_i}} \int_{t-\omega_{b_i}-\sigma_{ub_i}}^{t-\omega_{b_i}} P_u(v) s_{ub_i}(v) e^{-\int_v^t i(\mu) d\mu} dv \right].$$

Il reddito d'impresa (per unità di tempo) è pertanto:

$$(33) \quad R_{b_i}(t) = p_{h+i} Y_{b_i} - (\Theta_{cb_i} + \Theta_{fb_i}),$$

da ripartirsi (§ 17) fra i consumatori partecipanti.

Adottando un diverso criterio d'ammortamento si sarebbe ridotto o accresciuto il reddito all'istante t a favore o a scapito dei risultati delle successive produzioni. Se in un intervallo $(t, t+dt)$ per distribuire più alti dividendi venisse calcolata una scarsa quota di ammortamento, negli intervalli successivi gli ammortamenti dovrebbero essere accresciuti della differenza più gli interessi. Gli amministratori illuderebbero i soci di avere conseguiti più larghi utili, stimolandoli ad un più largo consumo, che poi risulterebbe finanziato mediante una specie di prestito consuntivo, che costoro rimborserebbero, accresciuto degli interessi, sotto forma di minori utili futuri.

43. CAPITALE CIRCOLANTE, CAPITALE FISSO E BILANCIO FINANZIARIO. — Il bilancio finanziario si ottiene introducendo nella (8) la spesa per l'acquisto degli strumenti e risulta:

$$(34) \quad F_{b_i}' = \sum_{j=0}^{h+m} p_j Q_{j b_i} + \sum_{u=1}^s P_u s_{u b_i} + i F_{b_i} + R_{b_i} - p_{h+i} Y_{b_i},$$

in cui agli ultimi due termini può sostituirsi la loro somma algebrica data dalla (33).

Calcolo ora l'importo complessivo dei finanziamenti di cui l'impresa risulta debitrice ad ogni istante, i quali anche qui sono uguali ai costi sopportati nel passato che non hanno avuto ancora i correlativi ricavi ⁷⁾. I costi dei capitali circolanti, ossia del lavoro, dei servizi dei beni (H) e delle materie e servizi (M), sono misurati dalla (9).

Quelli riguardanti il capitale fisso sono pari alle quote non ancora ammortizzate del prezzo degli strumenti, accresciute dei relativi oneri finanziari. Per calcolarli bisogna distinguere gli strumenti acquistati nell'intervallo $(t - \omega_{b_i} - \sigma_{u b_i}, t - \omega_{b_i})$, da quelli acquistati nell'intervallo $(t - \omega_{b_i}, t)$. Poichè l'ammortamento ha inizio dopo un periodo di durata ω_{b_i} , pari alla durata della produzione, dal momento dell'acquisto, gli strumenti acquistati all'istante v , definito nel primo intervallo, risultano al tempo t ammortizzati per un periodo di durata $t - (v + \omega_{b_i})$; e da ammortizzare per un periodo di durata $\sigma_{u b_i} - [t - (v + \omega_{b_i})] = v + \sigma_{u b_i} + \omega_{b_i} - t$, e per un importo:

$$\frac{v + \sigma_{u b_i} + \omega_{b_i} - t}{\sigma_{u b_i}} \dot{r}_u(v) s_{u b_i}(v) e^{\int_v^t i(\mu) d\mu}$$

Quelli acquistati nel secondo intervallo si devono invece ammortizzare per intero, essendo ancora in corso le lavorazioni in cui furono

⁷⁾ V. la nota (21) del cap. I.

investiti i servizi resi dal momento dell'acquisto. L'importo complessivo dei finanziamenti relativi al capitale fisso risulta pertanto:

$$\Phi_{b_i}(t) = \sum_{u=1}^g \left\{ \int_{t-\omega_{b_i} - \sigma_{ub_i}}^{t-\omega_{b_i}} \frac{v + \sigma_{ub_i} + \omega_{b_i} - t}{\sigma_{ub_i}} P_u(v) s_{ub_i}(v) e^{-\int_v^t i(\mu) d\mu} dv + \int_{t-\omega_{b_i}}^t P_u(v) s_{ub_i}(v) e^{-\int_v^t i(\mu) d\mu} dv \right\}$$

Il debito totale d'impresa per i finanziamenti ricevuti è quindi:

$$(35) \quad F_{b_i}(t) = \Phi_{b_i} + \int_{t-\omega_{b_i}}^{h+m} \sum_{j=0}^j P_j(v) Q_{ib_i}(v) e^{-\int_v^t i(\mu) d\mu} dv$$

Può riscontrarsi come la (35) sia l'integrale della (34) modificata nel modo anzidetto mediante la (33). La (34) può anche scriversi sostituendo alla F_{b_i} il suo valore dato dalla (35).

I costi misurati dalla F_{b_i} riceveranno i correlativi ricavi mediante la vendita dei prodotti delle lavorazioni in corso e di quelli da ottenersi mediante l'investimento, tra l'altro, dei servizi residui degli strumenti posseduti.

44. NUOVE EQUAZIONI NELL'EQUILIBRIO GENERALE. — Il sistema di equazioni dell'equilibrio dinamico d'impresa — (31), (32), (33) e (34) — è ora completo, e vale a determinare i tassi di domanda del lavoro, dei servizi dei beni (H), dei beni (M) e degli strumenti, il reddito da ripartire e la domanda o l'offerta di finanziamenti. Sono

questi i valori — funzioni dei prezzi, del saggio di interesse di mercato e delle loro tendenze — da introdursi nelle equazioni dell'equilibrio dinamico generale, nel quale tali incognite sono determinate.

A queste equazioni, corrette nel modo indicato nel § 38, deve apportarsi una sola modificazione. Bisogna cioè aggiungere, nelle equazioni rappresentanti l'eguaglianza della domanda e dell'offerta di strumenti, la domanda dei produttori; la (29) deve perciò risciversi nel modo seguente:

$$\sum_{x=1}^X s_{ux} + \sum_{i=1}^{m+s} \left(\sum_{b_i=1}^{B_i} s_{ub_i} \right) - \sum_{\substack{b_i=1 \\ i=m+u; u=1, \dots, s}}^{B_i} Y_{b_i} = 0,$$

45. QUALCHE RIFLESSIONE. — La trattazione svolta mette in chiaro rilievo la congiunzione tecnica ed economica della gestione, la quale, si è veduto, non consente determinazioni di convenienza di singoli investimenti, ma impone un'unico progetto, inscindibile nelle sue parti, che abbracci l'intera vita dell'impresa.

Si sarà anche rilevato che l'ammortamento ha una parte decisiva ed insopprimibile nella determinazione del reddito, ma non risponde — vedi il piano degli investimenti — allorquando si debba procedere a calcoli di convenienza economica nell'acquisto di strumenti: a tale scopo non può prendersi a base il costo del servizio di questi beni, computato mediante procedimenti d'ammortamento sempre soggettivi ed arbitrari.

Si è veduto che, a rigor di termini, i calcoli del produttore devono estendersi all'intera durata probabile della vita dell'impresa; ma questo, naturalmente, non significa che l'imprenditore concepisca un piano degli investimenti dettagliato nei particolari per tutta la durata di questo, perchè è certo che, quanto più il tempo cui si riferiscono le previsioni si allontana, tanto più difficile riesce prevedere rese industriali e, specialmente, prezzi d'acquisto di mezzi produttivi, saggi di interesse e prezzi di vendita dei prodotti, ragion per cui il piano, nelle sue parti più distanti, diviene sempre più vago e ad un certo punto,

che può anche capitare prima del termine previsto della vita dell'impresa, non tiene più nessun conto delle ulteriori possibilità produttive dell'impresa stessa. E così il futuro esercita un'influenza sempre minore, ed infine nulla, sulla condotta presente, la cui determinazione è appunto lo scopo del piano.

Il piano studiato (§§ 40, 41), nonostante la particolareggiata rappresentazione dei suoi componenti, rientra precisamente in questo ordine di idee, perchè le rese industriali, i prezzi ed il saggio dell'interesse, che vi figurano, sono determinati tenendo precisamente conto dei rischi e delle incertezze dell'avvenire. Ed è appunto in tal modo che, nel piano, conformemente a quanto suggerisce l'osservazione, l'influenza, che gli strumenti da acquistarsi in avvenire hanno sulle quantità acquistate al presente, può essere notevole per un futuro più o meno prossimo, ma, prima o poi, finisce per isvanire del tutto.

VI. — L'equilibrio dinamico d'impresa nei casi della concorrenza imperfetta e del monopolio ⁸⁾

46. LE EQUAZIONI. — L'equilibrio del produttore nei diversi casi fin qui considerati presuppone un regime di libera concorrenza perfetta, in cui il tasso della produzione di ciascuna impresa, infinitesimo rispetto al tasso della produzione totale del mercato, non possa influire sul prezzo del prodotto. Si supponga ora che l'estensione assunta dalle imprese offra loro questa possibilità. È il caso della concorrenza imperfetta.

⁸⁾ In questa sezione introduco nell'equilibrio dinamico studiato nel capitolo I un caso particolare di monopolio e di concorrenza imperfetta — cui dò un breve, fugace cenno — quello dell'esistenza, per un dato prodotto, di un solo produttore oppure di un numero non grande di produttori che controllano ciascuno una quota parte della produzione non insignificante rispetto al totale, ed esercitano perciò un'influenza diretta sul prezzo. Fra l'interessante letteratura sull'argomento, mi limito a ricordare: L. AMOROSO, *La curva statica di offerta*, in « Giornale degli Economisti », 1930, che più direttamente ha ispirato la presente, succinta, trattazione.

Consideriamo l'impresa b_i , fermandoci allo schema del capitolo primo e prescindendo dalle estensioni contenute nelle sezioni III e V di questo capitolo. Essendo:

$$Y_{b_i}(t, Q_{0b_i}, \dots, Q_{h+m, b_i}),$$

il tasso totale, previsto, di produttività, indico con $p_{h+i, b_i}(t, Y_{b_i})$ il prezzo del prodotto che l'imprenditore considerato presume, all'istante t , che si stabilisca sul mercato al tempo $t + \omega_{b_i}$, in funzione della sua offerta. La p_{h+i, b_i} risulta da una valutazione sintetica, sia della futura domanda di mercato, tenendo conto di ogni circostanza che possa determinarla, sia dell'offerta, a quel momento, di tutte le imprese concorrenti, quantità, questa, che, determinata dagli investimenti compiuti ad un istante passato distante da quello considerato di un intervallo pari alla durata della produzione, è indipendente dal prezzo che a quel tempo sarà in vigore sul mercato. Tale quantità il produttore b_i , pure ammesso che conosca, all'istante t , la situazione di tutte le imprese, deve ugualmente assoggettare ad una previsione necessariamente incerta ed approssimativa, perchè a questo momento sono ancora da determinarsi gli investimenti futuri delle imprese a più breve periodo produttivo. Compito difficile, questo, di prevedere il futuro comportamento del mercato, ma che l'imprenditore non potrà evitare e cercherà di assolvere nel miglior modo possibile, allo scopo di mettersi in grado di determinare un prezzo presunto di vendita dei suoi prodotti che sia abbastanza probabile e che possa assumere con tranquillità a base dei suoi calcoli.

La p_{h+i, b_i} è, al solito, funzione di p_{h+i} e di p_{h+i}' . Può supporre:

$$\frac{\partial p_{h+i, b_i}}{\partial Y_{b_i}} < 0.$$

I tassi degli investimenti sono determinati dalla condizione di massimo del reddito previsto:

$$R_{b_i}(t) = p_{h+i, b_i}(t, Y_{b_i}) Y_{b_i} - \sum_{j=0}^{h+m} p_j Q_{j b_i} e^{\int_t^{t+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, v) dv}.$$

Eguagliando a zero le derivate parziali di R_{b_i} rispetto a ciascuna incognita e ponendo in evidenza si ha:

$$(36) \quad \left(p_{h+i, b_i} + Y_{b_i} \frac{\partial p_{h+i, b_i}}{\partial Y_{b_i}} \right) \frac{\partial Y_{b_i}}{\partial Q_{j b_i}} = p_j e^{\int_t^{t+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, v) dv},$$

$j = 0, \dots, h + m.$

Queste equazioni significano che, ad ogni istante, conviene investire in misura tale che il ricavo marginale (per unità di tempo e di bene) di ciascun mezzo produttivo — e cioè il valore del suo tasso marginale di produttività, valutato al prezzo previsto del prodotto. meno il decremento marginale (per unità di tempo e di bene) di questo prezzo moltiplicato per l'intera quantità da prodursi — ne eguagli il costo unitario, ossia il prezzo d'acquisto accresciuto degli interessi per la durata del periodo produttivo.

Infatti, bisogna tener presente che per ogni nuova unità venduta si verifica una diminuzione del prezzo $\left(\frac{\partial p_{h+i, b_i}}{\partial Y_{b_i}} \right)$, che incide sull'in-

tera quantità offerta.

Le (36) possono anche porsi nella forma delle (6) e ricevere analoga interpretazione.

Nel caso della concorrenza perfetta è $\frac{\partial p_{h+i, b_i}}{\partial Y_{b_i}} = 0$, e le (36) si riducono alle (5). Nel caso del monopolio, l'altro estremo della concorrenza imperfetta, queste equazioni non mutano forma, ma, essendo nulla l'offerta degli altri produttori, p_{h+i, b_i} rappresenta, in funzione di Y_{b_i} , la legge di domanda prevista.

Le (36) sono $1+h+m$ equazioni atte a determinare gli altrettanti tassi d'investimento. Sono queste le domande dei mezzi produttivi da introdursi nelle equazioni dell'equilibrio generale (§ 17). Nessuna modificazione dove apportarsi alle altre equazioni, le (7) e (8), dell'e-

quilibrio del produttore. Nel caso del monopolio l'offerta del bene i , da introdursi nella (11), è la sola quantità fabbricata da $b_i=1$.

Poichè, per ipotesi, il prodotto ottenuto ad ogni istante dipende dagli investimenti compiuti ad un momento passato distante d'un periodo pari alla durata della produzione, e poichè tale prodotto deve essere immediatamente ed interamente venduto, è soltanto nella determinazione dell'estensione degli investimenti che l'imprenditore può tener conto della dipendenza del prezzo dalle dimensioni della sua offerta, e non anche al momento della vendita.

VII. — Schema più complesso della produzione.

47. IL PREVENTIVO TECNICO. — Ho finora mantenuta l'ipotesi della dipendenza del prodotto ottenuto ad un certo momento dagli investimenti effettuati ad un istante passato, distante d'un intervallo pari alla durata della produzione. Studio ora l'equilibrio d'impresa assumendo uno schema più complesso, e precisamente che gli investimenti abbiano luogo in modo continuo nell'intero corso del periodo produttivo.

Si consideri l'impresa b_i . Al solito, ωb_i è la durata della produzione, prefissata da leggi tecniche insuperabili. Ad ogni istante bisogna determinare i tassi degli investimenti da farsi nelle diverse lavorazioni in corso per portarle a compimento. Non è dubbio che si debba prescindere dai piani che hanno regolato fino a quel momento le lavorazioni, e rifare i calcoli sulla base delle nuove previsioni tecniche ed economiche.

Una lavorazione, che all'istante t si trovi alla fase η , fu iniziata al tempo $t - \eta$ e terminerà all'istante $t - \eta + \omega b_i$ ($\eta = [0, \omega b_i]$). Sia:

$$y_{b_i} \left[t, \tau, \eta, q_{0b_i}(t, \tau, \eta), \dots, q_{h+m, b_i}(t, \tau, \eta) \right],$$

l'incremento di prodotto per unità di tempo, che, all'istante t , si prevede di ottenere a lavorazione terminata (al tempo: $t - \eta + \omega b_i$) dall'investimento — al momento τ ($\tau = [t, t - \eta + \omega b_i]$), nella lavorazione che attualmente (al tempo t) si trova alla fase η ($\eta = [0, \omega b_i]$) —

dei diversi mezzi di produzione secondo i tassi: q_{jb_i} ($j = 0, \dots, h+m$). Chiamiamo y_{b_i} *tasso parziale (previsto) di produttività*.

Tratteggio brevemente le principali caratteristiche della y_{b_i} . Questa funzione dipende da τ , perchè i rendimenti industriali sono legati al comportamento di un complesso di circostanze (tecniche, atmosferiche, giuridiche, sociali, ecc.) al momento degli investimenti, e dipende da t , perchè le previsioni di tali rendimenti variano a seconda del momento in cui sono formulate. La dipendenza da η sta a significare che dati investimenti, effettuati ad un dato istante, producono incrementi di prodotto diversi, a seconda della fase in cui si trova la lavorazione.

Circa la dipendenza dai tassi d'investimento può ripetersi quanto fu detto intorno al tasso totale di produttività (§ 13). Anche qui può assumersi:

$$\frac{\partial y_{b_i}}{\partial q_{jb_i}} > 0, \quad \frac{\partial^2 y_{b_i}}{\partial q_{jb_i}^2} < 0,$$

$j=0, \dots, h+m.$

Non ho creduto opportuno introdurre nella y_{b_i} altre variabili, il che più o meno agevolmente potrà farsi, volendo, per rappresentare quelle dipendenze, fra le tante pensabili, che particolarmente interessino. Con l'ausilio del calcolo funzionale è possibile dare una rappresentazione di gran lunga più generale alle complesse relazioni che legano gli investimenti compiuti nel corso del periodo produttivo al prodotto finito.

L'incremento totale di prodotto che l'imprenditore prevede, all'istante t , di ottenere (al tempo $t - \eta + \omega_{b_i}$) dalla lavorazione che si trova attualmente alla fase η , in conseguenza dei nuovi investimenti da farsi nell'intervallo $(t, t - \eta + \omega_{b_i})$ che ancora manca al suo termine, risulta:

$$(37) \quad Y_{b_i}(t, \eta) = \int_{\eta=(0, \omega_{b_i})}^{t-\eta+\omega_{b_i}} y_{b_i} d\eta,$$

Per $\eta = 0$, la (37) rappresenta il previsto tasso totale di produt-

tività della lavorazione che a quel momento ha inizio. Per $\eta = \omega_{b_i}$, invece, si annulla conformemente all'ipotesi che nessun nuovo incremento di prodotto possa ottenersi da lavorazioni già durate un intero periodo produttivo.

48. IL PIANO ECONOMICO. — Qual'è il flusso di mezzi produttivi che l'imprenditore, all'istante t , conta immettere nelle diverse lavorazioni in corso per portarle a compimento? Si tratta di determinare i valori delle:

$$q_{jb_i}(t, \tau, \eta), \quad (\tau = [t, t - \eta + \omega_{b_i}]; \quad \eta = [0, \omega_{b_i}]; \quad j = 0, \dots, h + m).$$

Consideriamo la lavorazione che si trova attualmente alla fase η . Il produttore mira a rendere massima la differenza fra il valore attuale dei ricavi sperati dai nuovi investimenti ed il valore attuale dei costi ad essi correlativi, ossia:

$$\Gamma_{b_i}(t, \eta) = p_{h+i, b_i}(t, \eta) Y_{b_i}(t, \eta) e^{-\int_t^{t-\eta+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, \tau) d\tau} +$$

$$- \int_t^{t-\eta+\omega_{b_i}} \sum_{j=0}^{h+m} p_{jb_i}(t, \tau) q_{jb_i}(t, \tau, \eta) e^{-\int_t^{\tau} i_{b_i}(t, \nu) d\nu} d\tau,$$

$$\eta = (0, \omega_{b_i}).$$

$p_{h+i, b_i}(t, \eta)$ è il prezzo del prodotto previsto al tempo t per l'istante $t - \eta + \omega_{b_i}$.

Bisogna ricercare le q_{jb_i} che rendono massimo Γ_{b_i} . È un problema del calcolo delle variazioni. Si trova (appendice VI) che deve essere identicamente nell'intervallo $(t, t - \eta + \omega_{b_i})$:

$$(38) \quad p_{h+i, b_i}(t, \eta) \frac{\partial y_{b_i}}{\partial q_{j b_i}} e^{-\int_{\tau}^{t-\eta+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, v) dv} = p_{j b_i}(t, \tau),$$

$$\eta = (0, \omega_{b_i}), \tau = (t, t - \eta + \omega_{b_i}),$$

$$j = 0, \dots, h + m,$$

in cui $\frac{\partial y_{b_i}}{\partial q_{j b_i}}$ è l'incremento di prodotto, per unità di tempo e di bene, da ottenersi (al termine della produzione) dall'investimento al momento τ dell'ultima dose (infinitesima) del mezzo di produzione j nella lavorazione che all'istante t è allo stato di lavorazione η . Chiamo tale incremento *tasso parziale marginale di produttività*.

Può pertanto enunciarsi il seguente teorema:

Il produttore, ad ogni istante, si propone di investire, nel periodo che manca al termine delle lavorazioni in corso, in misura tale che il valore, riferito al momento dell'investimento, del tasso parziale marginale di produttività di ciascun mezzo produttivo si eguagli al suo prezzo di acquisto a quel momento.

Le (38) costituiscono un sistema di $1+h+m$ equazioni, atto a determinare gli altrettanti tassi: $q_{j b_i}(t, \tau, \eta)$, ($\tau = [t, t - \eta + \omega_{b_i}]$; $\eta = [0, \omega_{b_i}]$; $j = 0, \dots, h + m$).

Per $\tau > t$ queste funzioni rappresentano sinteticamente il piano tecnico ed economico delle lavorazioni in corso all'istante t . Per $\tau = t$, si ottengono i tassi effettivi:

$$q_{j b_i}(t, \eta) = q_{j b_i}(\tau = t).$$

49. I TASSI EFFETTIVI DEGLI INVESTIMENTI. — Questi tassi possono anche determinarsi indipendentemente da quelli futuri, perchè, nello schema assunto della produzione, non c'è congiunzione, nè tecnica, nè economica, tra gli investimenti effettuati nel corso di ciascuna lavorazione. Dalla y_{b_i} (§ 47) risulta infatti che la produttività dei beni impiegati ad un certo momento è indipendente dagli investimenti fatti

nel trascorso periodo della lavorazione considerata, nonché da quelli da farsi nella stessa in avvenire.

I tassi effettivi d'investimento possono perciò determinarsi rendendo massima la differenza tra il valore attuale del tasso parziale di produttività degli investimenti effettuati all'istante t :

$$y_{b_i} \left[t, \tau, \eta, q_{ob_i}(t, \eta), \dots, q_{h+m, b_i}(t, \eta) \right]_{(\tau=t)},$$

ed il loro costo, ossia:

$$\Gamma_{b_i}(t) = p_{h+i, b_i}(t, \eta) y_{b_i}(\tau=t) e^{-\int_t^{t-\eta+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, v) dv} - \sum_{j=0}^{h+m} p_j q_{j b_i}(t, \eta).$$

Eguagliando a zero le derivate parziali della Γ_{b_i} rispetto a ciascuna incognita, si ha:

$$p_{h+i, b_i} \frac{\partial y_{b_i}}{\partial q_{j b_i}} e^{-\int_t^{t-\eta+\omega_{b_i}} i_{b_i}(t, v) dv} = p_j$$

$\eta = (0, \omega_{b_i}),$
 $j = 0, \dots, h+m.$

Sono le medesime relazioni fornite dalle (38) per $\tau = t$.

I tassi effettivi *totali* di investimento dei diversi mezzi di produzione in tutte le lavorazioni in corso risultano:

$$(39) \quad Q_{j b_i}(t) = \int_0^{\omega_{b_i}} q_{j b_i}(t, \eta) d\eta,$$

$j = 0, \dots, h+m.$

Sono queste le funzioni di domanda da introdursi nelle equazioni (10) e (11) dell'equilibrio generale (§ 17).

50. **RISULTATI DI GESTIONE E REDDITO DA RIPARTIRE.** — All'istante t il prodotto finito (per unità di tempo) è quello ottenuto dalla lavorazione iniziata al tempo $t - \omega_{b_i}$. I tassi effettivi degli investimenti effettuati, all'istante $v \leq t$, nelle lavorazioni che si trovavano alla fase η , sono: $q_{j b_i}(v, \eta)$, ($\eta = [0, \omega_{b_i}]$). I tassi degli investimenti compiuti a quel momento nella lavorazione iniziata all'istante $t - \omega_{b_i}$, e quindi durata $v - (t - \omega_{b_i})$, sono pertanto:

$$q_{j b_i}(v, \eta) \quad (\eta = v - t + \omega_{b_i}, \\ v = (t - \omega_{b_i}, t).$$

Se tali investimenti hanno una produttività effettiva misurata dal tasso:

$$y_{b_i}[t, v, \eta, q_{0 b_i}(v, \eta), \dots, q_{h+m, b_i}(v, \eta)] \quad (\eta = v - t + \omega_{b_i}),$$

da confrontarsi con il tasso parziale previsto y_{b_i} , il prodotto finito (per unità di tempo) all'istante t risulta:

$$(40) \quad Y_{b_i}(t) = \int_{t - \omega_{b_i}}^t y_{b_i} d v.$$

Questa è l'offerta da introdursi nelle equazioni (11) dell'equilibrio generale. In funzione di t , Y_{b_i} rappresenta il modificarsi nel corso del tempo dei rendimenti industriali.

Le imprese, suppongo, ripartiscono, ad ogni istante, un reddito misurato dalla differenza tra i ricavi conseguiti dalla vendita dei prodotti ottenuti dalla lavorazione giunta a compimento ed i costi degli investimenti ad essi relativi; ossia un reddito:

$$(41) \quad R_{b_i}(t) = p_{h+i} Y_{b_i} - \int_{t - \omega_{b_i}}^{h+m} \sum_{j=0} p_i(v) q_{j b_i}(v, \eta) (\eta = v - t + \omega_{b_i}) e^{\int_v^t i(\mu) d\mu} dv,$$

da distribuirsi, al solito, nel modo indicato nel § 17.

51. **BILANCIO FINANZIARIO.** — Il bilancio finanziario può scriversi come la (8), ma i nuovi valori delle sue voci sono dati dalle (39), (40) e (41).

I finanziamenti sono uguali, è noto, ai costi che, al momento considerato, non hanno avuto il loro ricavo. I costi relativi agli investimenti effettuati nella lavorazione che ebbe inizio all'istante ν (definito nell'intervallo $[t - \omega b_i, t]$) sono:

$$f_{b_i} = \int_{\nu}^{t} \sum_{j=0}^{h+m} P_j(\mu) q_{jb_i}(\mu, \eta) (\eta = \mu - \nu) e^{\int_{\mu}^t i(\tau) d\tau} d\mu,$$

e quelli totali di tutte le lavorazioni in corso, iniziate nell'intervallo $(t - \omega b_i, t)$:

$$F_{b_i}(t) = \int_{t - \omega b_i}^t f_{b_i} d\nu.$$

CAPITOLO TERZO

CENNI ILLUSTRATIVI DELLA TEORIA

52. L'EQUILIBRIO DINAMICO ED IL MOTO STORICO. — Senza tentare una esauriente interpretazione ed esposizione in linguaggio ordinario della teoria, ne metto in evidenza ora, a studio compiuto, alcuni dei maggiori aspetti.

In conformità al principio fondamentale della dinamica, enunciato nella prefazione, il mercato raggiunge ad ogni momento una posizione di equilibrio. Sono in equilibrio i consumatori, perchè i programmi secondo cui regolano la loro condotta prevedono un massimo di soddisfazioni presenti e future. Sono in equilibrio le imprese, perchè, ad ogni istante, raggiungono il pareggio nel bilancio finanziario e regolano gli investimenti e quindi i finanziamenti in base a piani più o meno estesi nel tempo, miranti a realizzare i più ampi divari fra i ricavi ed i costi delle lavorazioni. È in equilibrio l'intero mercato, perchè i prezzi e l'interesse si stabiliscono ad un livello tale da eguagliare simultaneamente le domande e le offerte totali dei beni, dei servizi e dei finanziamenti.

Queste, in breve, le condizioni dell'equilibrio dinamico. Nel corso del tempo, mutano gusti, bisogni e spirito di previdenza, riflettendosi sulle valutazioni prospettive dell'utilità dei consumi, si perfezionano e si innovano i metodi di lavorazione, cambiano le condizioni fisiche, meteorologiche e tecniche della produzione, si proiettano nel futuro, nei modi più diversi, le tendenze presenti dei prezzi, sotto l'influenza

di ogni sorta di eventi economici, politici e sociali, varia la situazione economica degli individui e quella finanziaria e tecnica delle imprese: consumatori e produttori tessono e ritessono i loro programmi ed il sistema economico assume configurazioni di equilibrio sempre nuove.

Che cosa assicura che le previsioni vengano verificate? Niente. Consumatori e produttori si affannano a scrutare l'avvenire, si garantiscono contro l'imprevisto mediante valutazioni in qualche modo pessimistiche del futuro, ma i fatti non si stancano mai di dimostrare errati, in un senso o nell'altro, i loro calcoli.

Le condizioni di equilibrio degli investimenti — eguaglianza, al margine, del ricavo al costo previsto, nelle diverse forme in cui può esprimersi — sono senz'altro verificate nei piani compilati al momento dell'investimento, all'inizio delle lavorazioni o nel corso delle medesime (nello schema più complesso della sez. VI del secondo capitolo), ma nessuna forza tende a che siano effettivamente verificate, nè in periodi brevi, nè in periodi lunghi. Lo stesso accade per le condizioni di massima soddisfazione regolanti la condotta degli individui.

L'equilibrio dinamico studiato non è un equilibrio tendenziale, non è un assetto verso cui si muova il sistema economico ed a cui finirebbe per pervenire in un periodo più o meno lungo di tempo, ove fossero verificate certe condizioni; ma è equilibrio effettivamente raggiunto.

Conseguentemente il moto del sistema economico, che la teoria descrive, è successione di posizioni effettivamente assunte, non di configurazioni medie o normali intorno alle quali oscillino le sue configurazioni concrete: perciò lo chiamo « storico ».

Tengo a far rilevare che la concezione esposta dell'equilibrio vuole significare soltanto che, ad ogni istante, le forze regolanti l'attività economica devono compensarsi, senza implicare con ciò che si realizzino tali o tal'altre condizioni di stabilità e di regolarità del mondo economico, che, anzi, intende rappresentare con tutte le sue oscillazioni e perturbazioni.

53. LE PREVISIONI DEI CONSUMATORI. — Le previsioni hanno una parte decisiva nell'equilibrio dinamico, il quale tante configurazioni può assumere quanti i sistemi di previsione concepibili.

Se in un dato intervallo di tempo, anzicchè un sistema (α), agisce sul mercato un sistema (β), differente dal primo per il fatto che un certo numero di individui attribuisce una minore intensità ai godimenti futuri o prevede più bassi prezzi dei beni di consumo, rispetto ad (α), si modificano a favore del consumo ed a scapito del risparmio i loro bilanci dell'entrata e dell'uscita, nell'intervallo stesso, con ripercussioni che si estendono a tutto l'equilibrio. Invero, aumentando la domanda o diminuendo l'offerta, da parte di costoro, dei beni e servizi di consumo e dei finanziamenti — funzioni dei prezzi di mercato —, ferma rimanendo da parte dei produttori la domanda dei beni e servizi produttivi e dei finanziamenti e l'offerta dei prodotti, una nuova configurazione deve assumere l'equilibrio, nel caso (β), in cui più alti siano i prezzi dei beni e servizi di consumo ed il saggio dell'interesse, rispetto al caso (α).

In tale configurazione sono maggiori le quantità consumate dagli individui del gruppo considerato e minori le quantità consumate dagli altri, nonchè quelle acquistate e investite dai produttori; e la totalità dei beni e servizi disponibili nell'intervallo e suscettibili alternativamente di consumo o di investimento produttivo, si ripartisce fra le due destinazioni in proporzione favorevole alla prima. Così — conseguenza non ultima dell'intervento del sistema (β) anzicchè del sistema (α) — viene ridotto il flusso futuro dei prodotti da ottenersi dagli investimenti compiuti nell'intervallo e si attua una ripartizione dei beni nel tempo per cui risulta accresciuto il consumo nell'intervallo stesso a scapito del consumo futuro, in conformità alle valutazioni intervenute nei programmi dei consumatori.

54. LE PREVISIONI DELLE IMPRESE. — Influenza non meno rilevante hanno sull'equilibrio le previsioni delle imprese. Supponiamo, ad esempio, che in un dato intervallo di tempo, anzicchè un sistema di previsioni (α), agisca un sistema (α), diverso dal primo per il fatto che una massa di produttori prevede migliori risultati tecnici dalle lavorazioni, che nell'intervallo hanno inizio, o anche più alti prezzi futuri dei prodotti — in funzione del loro prezzo di mercato — op-

pure un più basso livello dell'interesse. A diversi sistemi di previsioni corrispondono diverse configurazioni dell'equilibrio. Ecco infatti che gli imprenditori spingono oltre la produzione e fanno una più intensa domanda di mezzi produttivi e di finanziamenti. Poichè sono invariate le funzioni di domanda e di offerta da parte dei consumatori, l'equilibrio deve stabilirsi ad un listino in cui siano più alti, rispetto al caso (α), il saggio dell'interesse e i prezzi dei mezzi produttivi.

In tale configurazione dell'equilibrio sono maggiori le quantità ricevute e investite dai produttori in questione e minori le quantità acquistate e investite dagli altri, nonchè quelle ottenute dai consumatori. Così la totalità dei beni e servizi, disponibili nell'intervallo e suscettibili alternativamente di consumo o d'investimento, si ripartisce fra le due destinazioni in proporzione favorevole alla seconda, rispetto al caso (α).

Modificazioni perfettamente inverse della configurazione (α) si verificherebbero nel caso opposto, che si prevedessero rendimenti industriali inferiori o più bassi prezzi dei prodotti oppure un più alto livello dell'interesse.

Cenni sommari, questi, esposti nel presente e nel precedente paragrafo, ma sufficienti a porre in luce la portata dell'influenza delle previsioni sull'equilibrio dinamico e quindi sul moto storico delle società economiche.

55. IL SAGGIO DELL'INTERESSE. — Nei riguardi dei consumatori, il saggio dell'interesse di mercato, attraverso il tasso previsto, regola per mezzo delle (3) la distribuzione dei consumi nel tempo (§ 7) e, per mezzo delle (16) o delle (17), la composizione del patrimonio e la sua ripartizione fra i diversi investimenti. Quanto più alto è il saggio dell'interesse, tanto più bassa è la redditività dei beni perpetui e tanto minore la quantità che conviene possederne (§§ 24 e 26). Nessuna particolare influenza ha invece sulla domanda di strumenti (§ 35).

Nei riguardi dei produttori, l'interesse di mercato, attraverso il saggio previsto, agisce sulle dimensioni dei capitali circolanti investiti e quindi della produzione: fermando l'attenzione alle (5) o alle (6), si

riscontra come il rialzo dell'interesse, elevando il costo o riducendo il valore attuale del ricavo, faccia arrestare la produzione ad un punto in cui sono più alti i tassi marginali di produttività e più bassi i tassi d'investimento (§ 14). Maggiore influenza ha il saggio dell'interesse sull'impiego dei servizi dei beni perpetui di proprietà (§ 30) e degli strumenti (§§ 40 e 41).

Così, le domande e le offerte di beni, servizi e finanziamenti, oltre che dei prezzi, risultano tutte funzioni del saggio dell'interesse, il quale pertanto viene determinato dall'intero sistema di equazioni dell'equilibrio dinamico generale (§ 17).

Sono da rilevarsi la considerevole rigidità delle possibilità di rimborso dei finanziamenti, da parte dei produttori, e la conseguente eventualità di notevoli rialzi dell'interesse, in presenza d'una forte contrazione delle disponibilità finanziarie da parte dei risparmiatori. I prestiti ricevuti dalle imprese sono immobilizzati per l'intera durata della produzione e degli strumenti e non possono ritornare liquidi che mediante la vendita dei prodotti e, in caso di perdite, mediante versamenti da parte degli individui partecipanti. Pertanto, dell'importo dei finanziamenti ricevuti, pari, si rammenti, ai costi relativi alle lavorazioni in corso ed alle quote non ancora ammortizzate del costo degli strumenti (§§ 16, 32, 43 e 51), i produttori non possono rimborsare, al massimo, in un dato periodo di tempo, che i costi relativi ai prodotti finiti e venduti: per il resto, potranno pagare un debito soltanto assumendone un altro.

56. LA DINAMICA DEI CONSUMI E DEI PROCESSI PRODUTTIVI. — Nell'equilibrio del consumatore si è supposto, in via generale, che gli individui facciano conto delle quantità da consumare di tutti i beni e servizi, ma è evidente che ove alcuni non fossero atti a soddisfare dei bisogni, la funzione edonistica assegnerebbe loro una utilità nulla, escludendoli dal listino individuale dei consumi. Ciò non toglie che un bene possa essere utile per un individuo e non esserlo per un altro, nè che possa diventarlo col passare del tempo: rispetto a t , le funzioni dell'utilità rappresentano appunto la dinamica dei gusti e le equazioni delle economie individuali la dinamica dei consumi.

Considerazioni analoghe possono farsi per le imprese. Nell'economia del produttore si son poste, in forma generale, le leggi tecniche delle trasformazioni produttive in funzione di tutti i beni e servizi esistenti sul mercato; ma si comprende come taluni, a seconda delle imprese e dell'intervallo di tempo considerato, possano risultare impiegati per quantità nulle, non avendo alcuna produttività ($\frac{\partial Y_{b_i}}{\partial Q_{j b_i}} = 0$) o non essendo conveniente comprenderli nella combinazione preferita.

Così ha luogo la scelta del processo produttivo. Invero, questo è il complesso delle operazioni che si compiono per ottenere un dato prodotto e, in via generale, può ritenersi caratterizzato dalla specie dei mezzi adoperati: per passare da un processo ad un altro basta quindi, ad esempio, eliminare, aggiungere o sostituire anche uno solo di tali mezzi. Le equazioni degli investimenti di impresa, insieme alle quantità impiegate dei diversi beni, determinano anche il processo prescelto: infatti, risulteranno eguali a zero le quantità dei mezzi produttivi che caratterizzano processi di lavorazione non convenienti.

Nel corso del tempo, nell'ininterrotto divenire della vita economica, si modificano le leggi tecniche di fabbricazione, sia previste che effettive, riflettendo i progressi della tecnica produttiva, varia il livello dell'interesse e dei prezzi e muta conseguentemente la composizione qualitativa degli investimenti. In funzione del tempo, le suddette equazioni rappresentano anche questa dinamica delle lavorazioni e dei processi produttivi.

Si distinguono in tal modo beni atti al solo consumo, beni atti soltanto alla produzione e beni suscettibili di uso alternativo, i quali diversamente si comportano nella dinamica del sistema economico.

57. IL NUMERO DELLE IMPRESE ED I GRUPPI INDUSTRIALI. — Il numero delle imprese che intervengono sul mercato ad un dato momento non è fisso, come potrebbe sembrare a prima vista, osservando che B_i ($i=1, \dots, m$) è un dato del problema. Questo è il numero delle imprese possibili, ma quelle che effettivamente producono in un certo intervallo di tempo risultano determinate nell'equilibrio generale del

mercato, rimanendo escluse le altre, per le quali, non offrendo il prezzo previsto del prodotto alcun margine di profitto, rispetto al costo, dovranno eguagliarsi a zero i tassi degli investimenti. Pertanto, o direttamente o attraverso i prezzi previsti, il numero delle imprese dipende ad ogni istante dal saggio di interesse e dai prezzi di mercato, nonchè dalle loro tendenze.

Determinata la specie dei mezzi produttivi adoperati ed il numero delle imprese, si delineano i gruppi e sottogruppi industriali, comprendenti, i primi, tutte le imprese produttrici di materie prime e sussidiarie, di servizi e strumenti, che in seguito a successive lavorazioni si trasformano in un dato bene di consumo, ed i secondi quelle che producono uno di tali mezzi. Nell'ipotesi assunta che ogni impresa fabbrichi un sol prodotto, tanti gruppi industriali si distinguono, quanti i beni di consumo oggetto di produzione. Nei gruppi esiste una gerarchia dei sotto gruppi, a seconda della distanza che li separa dal consumo: si distinguono sottogruppi di primo ordine, quelli aventi per oggetto beni atti senz'altro al consumo, sottogruppi di secondo ordine, quelli che forniscono mezzi di produzione al sottogruppo di primo ordine, e così continuando sottogruppi di ordine superiore. Naturalmente, un sottogruppo che appartenga a più gruppi può assumere in ciascuno un ordine diverso. Nella dinamica delle imprese rappresentata dalle equazioni studiate, variando leggi della tecnica e prezzi di mezzi di produzione e prodotti, mutano i processi di lavorazione e variamente si scompongono e si ricompongono i gruppi e i sottogruppi industriali.

Particolare attenzione, nell'investigazione dei fenomeni della dinamica della produzione, quale è trattata nella teoria esposta, deve attrarre la solidarietà che lega fra loro i sottogruppi di ciascun gruppo, e specialmente di quei gruppi dei quali il solo sottogruppo di primo ordine produce beni o servizi di consumo. Invero, in tal caso, l'intensità, in un certo intervallo di tempo, della domanda, da parte dei consumatori, del bene o servizio di consumo prodotto, ne determina il prezzo di vendita, influenzando sulla previsione dei ricavi futuri del sottogruppo di primo ordine, e quindi sulla sua domanda attuale dei

mezzi in vendita, nello stesso intervallo, presso i sottogruppi di secondo ordine; a sua volta questa domanda determina il prezzo realizzato dai sottogruppi di secondo ordine ed influisce sui loro ricavi futuri previsti, e quindi sulla loro domanda attuale dei mezzi offerti, nello stesso intervallo, dai sottogruppi di terzo ordine; e, così continuando, per quelli di ordine superiore.

Poichè ogni impresa produce un sol bene ed è data la ripartizione fra i sottogruppi dell'intera serie delle lavorazioni, corrispondenti ad altrettanti beni intermedi occorrenti alla fabbricazione di ciascun bene di consumo, la teoria esposta trascura quel particolare aspetto della dinamica industriale, consistente nella integrazione e nella disintegrazione, orizzontale e verticale, della produzione.

58. TEORIA DINAMICA. FORZE DETERMINANTI E FORZE RISULTANTI. —

La teoria esposta, nonostante il quadro della realtà grandemente semplificato su cui è costruita, è teoria profondamente dinamica. Il sistema economico è rappresentato nella continuità del suo divenire; da una posizione iniziale, si passa, attraverso una serie continua di variazioni, a posizioni successive, nelle quali consiste il *moto storico* del sistema. Non v'è posizione di arrivo, che non sia a sua volta posizione di partenza. Non posizioni distinte, ma la successione continua delle posizioni: l'intera legge d'un movimento che non ha soste, nè interruzioni.

Le incognite degli equilibri singoli di individui e imprese e quelle dell'equilibrio generale sono le *forze risultanti* dell'equilibrio dinamico: tutti gli altri elementi, i dati, ne sono le *forze determinanti*. La totalità delle forze determinanti e delle forze risultanti, in funzione del tempo, costituisce una descrizione qualitativa e quantitativa del moto storico del sistema economico considerato.

Le forze determinanti dell'equilibrio dinamico dipendono quasi tutte dal tempo. Alcune ne sono funzioni *primitive*, e cioè: i prezzi previsti, le funzioni edonistiche, le leggi della tecnica produttiva, i tassi di ripartizione dei profitti d'impresa, i « versamenti », le spese

di « mantenimento » dei beni (H) e le relative aliquote di distribuzione, la durata prevista della vita di individui ed imprese.

Altre invece sono funzioni *ereditarie* del tempo, ossia si vanno formando, nella loro misura quantitativa, attraverso il movimento percorso dal sistema economico. Così, a un dato momento, l'importo dei finanziamenti di ciascun individuo risulta dal suo debito o credito, ad un istante preso ad origine dei tempi, in cui si riassume il passato anteriore, e dalla sua condotta a partire da quel momento. Altre forze ereditarie sono legate *direttamente* ad un più breve periodo di tempo. A un dato istante, ad esempio, le quantità possedute di strumenti dipendono dagli acquisti fatti a partire da un momento passato, distante d'un intervallo pari alla loro durata, ed il flusso dei prodotti finiti dagli investimenti effettuati all'inizio della produzione o (nell'estensione VII) nell'intero corso del periodo produttivo.

Nella realtà gran parte delle forze determinanti che, per semplicità, ho considerate primitive sono invece ereditarie.

Nel *moto storico* anche le forze ereditarie dell'equilibrio dinamico sono *risultanti*; le sue forze *determinanti* sono esclusivamente i valori noti all'origine dei tempi e le funzioni primitive del tempo.

Attraverso le forze ereditarie l'assetto del sistema economico ad ogni istante dipende dal passato ed a sua volta si riflette sul futuro. Per loro mezzo, ogni stato di fatto che nel passato si sia venuto generando, si ripercuote sul presente con una intensità più o meno rilevante, attraverso infinite azioni e reazioni, per vie dirette ed indirette: espressione, posso dire con l'Amoroso, d'una legge di ereditarietà per cui il passato condiziona il presente ed il presente il futuro. Il passato più remoto, precedente l'istante preso ad origine dei tempi, fa sentire la sua influenza attraverso gli elementi mediante i quali appare nelle equazioni e condizioni dell'equilibrio e del moto del sistema economico e nei quali trovasi riassunto.

Nello stesso modo, ogni circostanza che determina l'assetto del sistema economico a un dato momento, facendogli assumere una certa configurazione, anzichè un'altra, si ripercuote sull'intero movimento ulteriore del sistema, in quanto che ne modifica le condizioni iniziali.

59. CONCEZIONE SPIRITUALE DELLA REALTÀ. — Ciò nonostante la teoria svolta non rappresenta la realtà economica secondo una *concezione deterministica*, per cui il presente risulti rigorosamente determinato dal passato, perchè nel moto del mondo economico essa sempre nuovi fatti fa intervenire, nuove forze determinanti che il tempo reca immancabilmente con sè e che sono, alcune, il portato del caso e dell'imponderabile, altre l'elemento di libertà immanente nello spirito umano.

Il *nuovo* si ritrova, fra l'altro, nelle valutazioni edonistiche, nelle leggi della tecnica produttiva, nei prezzi previsti. In funzione del tempo, infatti i tassi di utilità rappresentano il modificarsi dei gusti e dell'intensità dello spirito di previdenza; e quelli previsti ed effettivi di produttività i miglioramenti quantitativi e qualitativi del prodotto per virtù delle abilità acquisite con l'esperienza, i progressi della tecnica delle lavorazioni, l'avvicinarsi delle stagioni, insomma, tutte le circostanze interne ed esterne della dinamica delle imprese che si riflettono sui rendimenti industriali. Le funzioni dei prezzi previsti riassumono sinteticamente le sempre rinnovate valutazioni, da parte dei soggetti economici, dei complessi movimenti del mercato e l'alternarsi ed il confondersi disordinato delle correnti di fiducia e di sfiducia. sotto l'azione di ogni sorta di eventi, politici, economici, sociali, meteorologici.

Così modificandosi incessantemente le forze ereditarie legate al passato, per l'apporto delle più recenti vicende, ed il *nuovo* irrompendo da ogni parte, configurazioni sempre diverse assume l'equilibrio dinamico ed il sistema economico non riposa mai in un dato assetto. Mutano gusti, bisogni e spirito di previdenza, variano quantità e distribuzione dei beni, si modificano i rapporti di credito e di debito ed i patrimoni, si evolvono i procedimenti della tecnica industriale, oscillano le speranze ed i timori dell'avvenire: sempre nuovi prezzi si stabiliscono, nuovi mezzi si investono, nuove quantità si producono, si scambiano, si consumano.

La teoria svolta può ritenersi fondata su una *concezione spirituale* della vita. Le valutazioni edonistiche individuali — le maggiori fra le

forze da cui essa fa dipendere il movimento economico — non riguardano soltanto piaceri fisiologici, conseguibili con l'appagamento di bisogni materiali, ma rappresentano, nel mio intendimento, valutazioni relative dei beni a seconda della loro attitudine a soddisfare aspirazioni umane di ogni genere, morali, religiose, culturali, sociali e simili. E le leggi della tecnica produttiva non costituiscono soltanto un sistema di vincoli, ma rispecchiano anche le conquiste della volontà, della tenacia e dell'ingegno nella dura lotta dello spirito contro la materia. Se non si è dato il dovuto peso alle forze direttrici consistenti nell'« azione politica », è stato soltanto, come si è già detto nell'introduzione, per i necessari limiti del lavoro.

60. I PROBLEMI DELL'ECONOMIA DINAMICA. — La teoria studiata rappresenta, nelle ipotesi precisate, le leggi dell'equilibrio dinamico e del movimento economico *in forma generale*. Ora bisogna individuare queste leggi.

Quali sono le caratteristiche dell'equilibrio dinamico? In quale direzione e con quale intensità agiscono le sue forze determinanti, primitive ed ereditarie, e quali influenze esercitano sulle forze risultanti? Se, in un dato intervallo di tempo breve quanto si voglia, anzichè un certo sistema di forze determinanti, agisse un sistema diverso, a motivo di tali o tal'altre variazioni nella sua composizione quantitativa e qualitativa, quali sarebbero le corrispondenti modificazioni nell'assetto del sistema economico, in quell'intervallo? È il primo ordine di ricerche, da compiersi nello studio dei problemi economici.

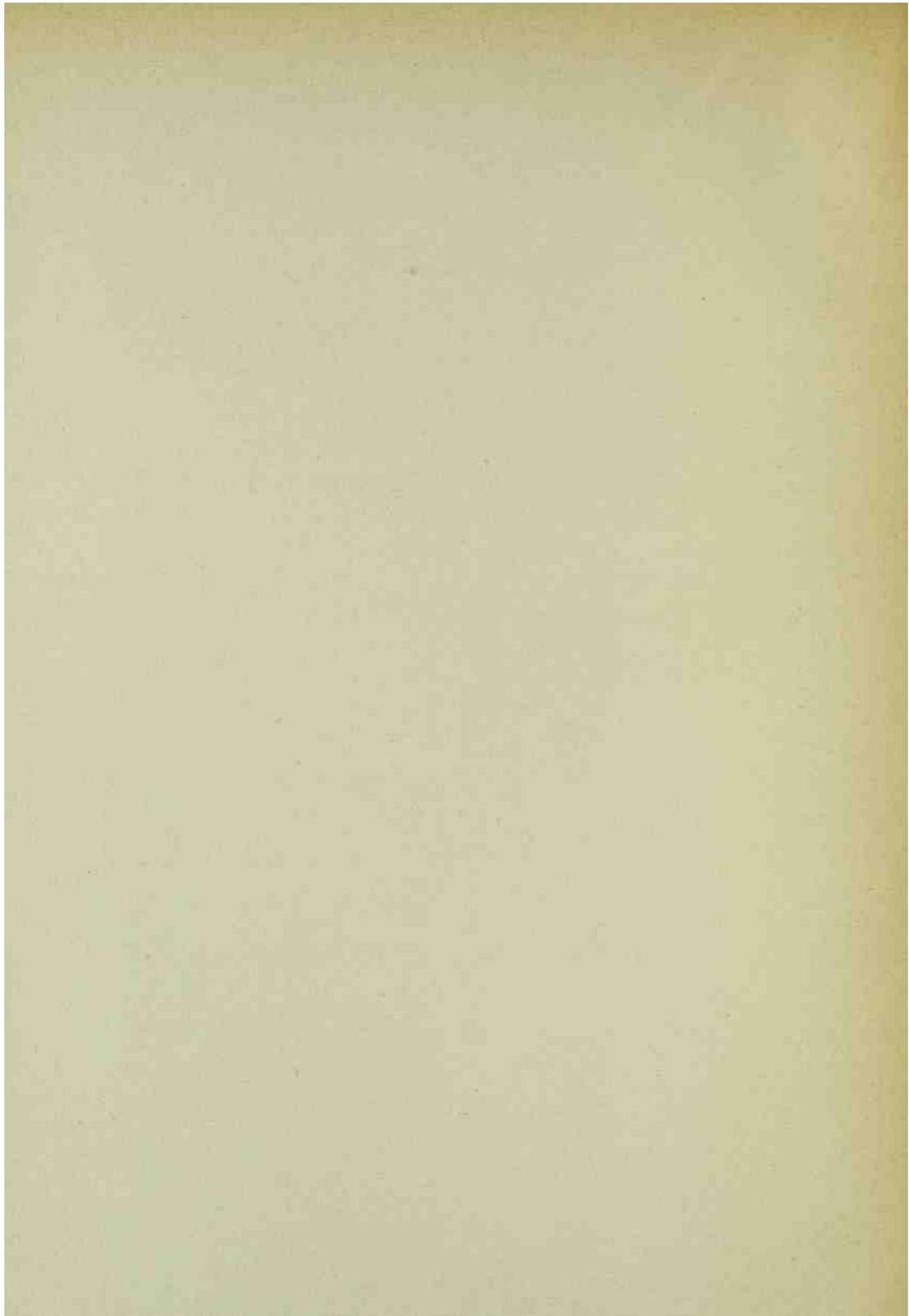
Il secondo ordine di ricerche, già fu detto, investe il campo della dinamica vera e propria. Quali sono le caratteristiche del moto storico d'una economia soggetta ad un dato sistema di forze determinanti? Come si comportano le sue singole forze risultanti? Si dirige l'economia verso un assetto stazionario e, nel caso affermativo, attraverso quali forme di movimento vi perviene ed in quanto tempo? Ritorna a posizioni o forme di moto già assunte nel passato oppure assume configurazioni sempre nuove? Ha il movimento forma ciclica e quali ne sono le cause, ossia le forze determinanti mancando le quali viene meno

tale forma di moto? Se nel corso di un dato intervallo di tempo, anzicchè un certo sistema di forze determinanti, agisse un sistema diverso, a motivo di tali o tal'altre variazioni nella sua composizione quantitativa e qualitativa, quali ripercussioni vicine e lontane si verificerebbero sull'ulteriore movimento del complesso economico? Quale è la tendenza secolare di una società economica, risultante — si badi — del moto storico e non tendenza generale secondo cui essa *debba* muoversi?

Vi sono poi i problemi inversi. Quali sono le condizioni che devono verificarsi affinché il movimento d'una economia abbia un dato comportamento? Esistono e quali sono le condizioni affinché si muova verso una certa configurazione e finisca per rimanervi? È il problema della società stazionaria. In qual senso devono agire tali o tal'altre forze determinanti, in un dato intervallo di tempo, affinché tali o tal'altre forze risultanti abbiano un certo andamento, oscillatorio o non, in un periodo successivo, oppure una data tendenza secolare?

Sono fondamentali, suggestivi problemi ancora insoluti della dinamica economica.

APPENDICI



APPENDICI

(Si trascurano gli indici x e b_i)

I (§ 7). — Indichiamo con $\varphi = 0$ la (1). In virtù del noto metodo del calcolo delle variazioni, detto dei moltiplicatori di Lagrange, posto:

$$\Psi = U + \lambda\varphi,$$

in cui λ è una funzione per ora arbitraria di τ , le funzioni incognite, che rendono massimo U_v con la condizione (1), devono soddisfare le seguenti equazioni:

$$(a) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_j} = 0, \quad j = 0, \dots, h + m,$$

$$(b) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial F} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial F'} \right) = 0;$$

da cui, eseguendo, si ha rispettivamente:

$$(a') \quad \frac{\partial U}{\partial C_j} - \lambda p_j = 0, \quad j = 0, \dots, h + m,$$

$$(b') \quad \lambda i + \lambda' = 0.$$

Integrando quest'ultima si ottiene:

$$(b'') \quad \lambda = u e^{-\int_t^\tau i(t, v) dv}$$

in cui u è una funzione di t da determinarsi, costante rispetto a τ .

Sostituito nella (a') a λ il suo valore (b''), la deduzione delle (3) è immediata.

II (§ 23). — Indichiamo con $\varphi = 0$ la (14). In virtù del già citato metodo del calcolo delle variazioni, detto dei moltiplicatori di Lagrange, posto:

$$\Psi = U + \lambda\varphi,$$

in cui λ è una funzione per ora arbitraria di τ , le funzioni incognite, che rendono massimo U_v con la condizione (14), devono soddisfare il seguente sistema di equazioni:

$$(a) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial C_j} = 0, \quad j = 0, \dots, h + m;$$

$$(b) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial F} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial F'} \right) = 0;$$

$$(c) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial H_j} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial H_j'} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Le (a) e le (b), come nell'appendice I, forniscono le (3).

Dalle (c), eseguendo, si ha:

$$\lambda \left(P_j - \frac{\partial M}{\partial H_j} \right) + \frac{d}{d\tau} (\lambda P_j) = 0,$$

da cui, sostituendo a λ il suo valore dato dalla (b'') della suddetta appendice, eseguendo successivamente la derivazione del secondo ter-

$$- \int_t^{\tau} i(t, v) dv$$

mine e dividendo infine per ue , si ottiene:

$$P_j - \frac{\partial M}{\partial H_j} - iP_j + P_j' = 0, \quad j = 1, \dots, h,$$

che può scriversi come la (16).

III (§ 30). — Indicando con Ω l'intera espressione integranda di Γ , le equazioni di Eulero forniscono le seguenti condizioni di massimo di questo integrale rispetto alle funzioni incognite ed alle loro derivate:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Q_j} = 0, \quad j = 0, \dots, h + m;$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial H_j} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial H_j'} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, h;$$

$$\int_t^{\tau + \omega} i(t, v) dv$$

da cui, eseguendo e moltiplicando infine per e , si ottengono le (19), c. d. d.

IV (§ 35). — Le (27) si ottengono supponendo pel momento note le S ed operando come nell'appendice I.

Circa le (28), poichè come si riscontra dalla (24) è $S' = s$, non si può procedere nella stessa maniera delle appendici I e II, e bisogna seguire altra via. Per semplicità, svolgo la dimostrazione nel caso dell'esistenza di un solo strumento, trascurando pertanto l'indice u , e tralascio la t nelle diverse funzioni. Ciò premesso e supponendo note a loro volta le C_j e la F , la U_v può scriversi in forma semplificata:

$$U_v = \int_t^v W(\tau, S) d\tau,$$

e la (25):

(a) $\alpha(\tau) - P(\tau)s(\tau) = 0.$

Bisogna determinare, nell'intervallo $\tau = (t, v)$, la funzione S che, insieme alla s , rende massimo U_v con la condizione (a). Indicando

con λ una funzione per ora arbitraria di τ , continua e derivabile, e con $\varphi = 0$ la (a), si formi l'espressione:

$$\Omega = \int_t^v (\mathbf{W} + \lambda\varphi) d\tau.$$

Essendo $\varphi = 0$ per ogni valore di τ , le condizioni di massimo di Ω sono anche condizioni di massimo di U_v .

Tenendo conto della (24), la Ω può scriversi nel modo seguente:

$$\Omega = \int_t^{t+\sigma} \mathbf{W} \left[\tau, \int_{\tau-\sigma}^t \mathbf{s}(v) dv + \int_t^v \mathbf{s}(v) dv \right] d\tau + \int_{t+\sigma}^v \mathbf{W} \left[\tau, \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \mathbf{s}(v) dv \right] d\tau + \int_t^v \lambda\varphi d\tau.$$

Avendo presente che sono assegnati i valori di s per $\tau < t$ (§ 35), variamo la Ω ; poniamo:

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & \int_t^{t+\sigma} \mathbf{W} \left\{ \tau, \int_{\tau-\sigma}^t \mathbf{s}(v) dv + \int_t^{\tau} [\mathbf{s}(v) + \gamma(v)\varepsilon] dv \right\} d\tau + \\ & + \int_{t+\sigma}^v \mathbf{W} \left\{ \tau, \int_{\tau-\sigma}^{\tau} [\mathbf{s}(v) + \gamma(v)\varepsilon] dv \right\} d\tau - \int_t^v \mathbf{W} d\tau - \int_t^v \lambda\mathbf{P}\gamma\varepsilon d\tau, \end{aligned}$$

in cui ε è una quantità tendente a zero e γ una funzione arbitraria, continua e derivabile, la quale deve rispondere alla condizione $\gamma(t) = 0$, affinchè la funzione incognita s risulti continua nel punto t .

Bisogna ora derivare $\delta\Omega$ rispetto a ε ed eguagliare a zero il risultato ottenuto dopo avere annullata la ε . Eseguendo si ha:

$$\int_t^{t+\sigma} \mathbf{w}(\tau, \mathbf{S}) \left[\int_t^{\tau} \gamma dv \right] d\tau + \int_{t+\sigma}^v \mathbf{w}(\tau, \mathbf{S}) \left[\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \gamma dv \right] d\tau - \int_t^v \lambda \mathbf{P} \gamma d\tau = 0,$$

dove è:

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{S}}$$

Indicando con $\beta(\tau)$ l'integrale generale della $\gamma(\tau)$ e sostituendo opportunamente si ottiene:

$$(b) \int_t^{t+\sigma} w(\tau, S) [\beta(\tau) - \beta(t)] d\tau + \int_{t+\sigma}^v w(\tau, S) [\beta(\tau) - \beta(\tau - \sigma)] d\tau - \int_t^v \lambda P \beta' d\tau = 0.$$

Allo scopo di eliminare la β' , si integri per parti il terzo integrale; si ha:

$$(c) \int_t^v \lambda P \beta' d\tau = [\lambda P \beta]_t^v - \int_t^v \beta \frac{d}{d\tau} (\lambda P) d\tau.$$

Scindiamo ora in due il secondo integrale della (b), eseguendo nel secondo il cambiamento della variabile allo scopo di fare apparire $\beta(\tau)$ al posto di $\beta(\tau - \sigma)$, e sostituiamo al terzo integrale la (c); eseguendo opportunamente, la (b) verrà così riscritta:

$$(d) \int_t^v w(\tau, S) \beta(\tau) d\tau - \int_t^{v-\sigma} w[\tau + \sigma, S(\tau + \sigma)] \beta(\tau) d\tau + \int_t^v \beta(\tau) \frac{d}{d\tau} (\lambda P) d\tau + \\ - \lambda(v) P(v) \beta(v) = \beta(t) \left\{ \int_t^{t+\sigma} w(\tau, S) d\tau - \lambda(t) P(t) \right\}.$$

Potendosi porre, data l'arbitrarietà di β , $\beta(t) = \beta(v) = 0$, la (d) si riduce ai primi tre integrali ed il secondo membro si annulla; perciò, indicando con (1), (2) e (3), rispettivamente le espressioni integrande di tali integrali, privati della β , si può scrivere:

$$(d') \int_t^v G(\tau) \beta(\tau) d\tau = 0,$$

in cui è:

$$G = \begin{cases} (1) + (2) + (3) & t \leq \tau \leq v - \sigma \\ (1) + (3) & v - \sigma \leq \tau \leq v. \end{cases}$$

Dall'annullarsi di (d') per qualunque valore di γ , si deduce in virtù d'un noto teorema:

$$G = 0,$$

ossia:

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(\tau, S) - w[\tau + \sigma, S(\tau + \sigma)] + \frac{d}{d\tau}(\lambda P) = 0, \\ \qquad \qquad \qquad t \geq \tau \geq v - \sigma, \\ \\ w(\tau, S) + \frac{d}{d\tau}(\lambda P) = 0 \\ \qquad \qquad \qquad v - \sigma \leq \tau \leq v; \end{array} \right.$$

da cui integrando si ottiene:

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} C + \int_{\tau}^{\tau + \sigma} w d\tau = \lambda(\tau) P(\tau) \\ \qquad \qquad \qquad t < \tau \leq v - \sigma, \\ \\ C + \int_{\tau}^v w d\tau = \lambda(\tau) P(\tau) \\ \qquad \qquad \qquad v - \sigma \leq \tau < v, \end{array} \right.$$

come può riscontrarsi osservando che derivando rispetto a τ si ritorna alle (e).

Ora la U , e quindi W e w , rappresenta un concetto analogo a quello di livello ¹⁾, di potenziale, di temperatura, vale a dire un concetto scalare relativo, determinato a meno d'una costante additiva, che non si può fissare se non con un principio estraneo (come si fa, ad es., nel caso dei livelli, dove tale principio è rappresentato dal livello del mare, al quale ci si riferisce) oppure con la scelta arbitraria del punto zero (come avviene nella scala delle temperature, con la scelta dello zero nel punto di fusione del ghiaccio). Quando si ha un fenomeno che dipende dal tempo, può darsi che anche l'origine della scala dipenda dal tempo. Nel nostro caso la costante C contenuta nelle

¹⁾ V. PARETO, *Manuale di Economia politica*, Milano 1919, cap. III, §§ 35 e 36, 55 a 58, e Appendice §§ 5 e 6.

equazioni (f) può pensarsi precisamente come dovuta a un « effetto di scala »: in altre parole, se con una data scala d'utilità risulta una costante C , è possibile modificare l'origine della scala della U in modo che questa costante si riduca a zero. Si può pertanto trattare il problema assumendo la C della (f) eguale a zero.

L'annullamento della costante contenuta in questa equazione può farsi anche per altra via. La (d) è una relazione che deve essere soddisfatta qualunque sia la β ; ora, salvo un più accurato controllo ed un più profondo studio del problema e delle (f), che mi sembrano di un tipo del tutto nuovo, ritengo che esista una forma della funzione arbitraria β , la quale, pur rispondendo alla condizione che sia $\beta(t) \neq 0$, renda nullo il primo membro della (d). Deve essere allora:

$$\int_t^{t+\sigma} w(\tau, S) d\tau - \lambda(t) P(t) = 0,$$

e quindi, come ci dice la (f) ponendo $\tau = t$, $C = 0$.

E così, finalmente, ponendo nella (f) $C = 0$, sostituendo a λ la (b'') dell'appendice I e tenendo conto delle semplificazioni eseguite, si ritrovano le (28), a meno dell'indice u , c. d. d.

La dimostrazione svolta può estendersi senza alcuna difficoltà al caso che gli strumenti siano in numero di 2, 3, ..., s , e può anche servire a dedurre per altra via le (27).

V (§ 40). — Le (31) si ottengono supponendo per momento note le S ed operando come nell'appendice III.

Per quanto riguarda le (32), seguo lo stesso procedimento dell'appendice IV. Anche qui, per semplicità, svolgo la dimostrazione nel caso dell'esistenza di un solo strumento, trascurando pertanto l'indice u , e tralascio la t nelle diverse funzioni. Ciò premesso e supponendo a loro volta note le Q_j , la Γ può scriversi in forma semplificata:

$$\Gamma = \int_t^{v-\omega} [W[\tau, S(\tau)] - \alpha(\tau) s(\tau)] d\tau,$$

dove è:

$$(a) \quad \alpha(v) = P(\tau) e^{-\int_t^v i(v) dv}$$

Bisogna determinare, nell'intervallo $\tau = (t, v - \omega)$, la funzione S che, insieme a $s - v$, la (30) —, rende massimo Γ . Procedendo come nell'appendice precedente, si trovano — v , la (f) — le seguenti equazioni funzionali:

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} C + \int_{\tau}^{\tau+\sigma} w dv = \alpha(\tau) \\ C + \int_{\tau}^{v-\omega} w dv = \alpha(\tau) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t < \tau < v - \omega - \sigma, \\ v - \omega - \sigma < \tau < v - \omega, \end{array}$$

in cui anche qui è:

$$w = \frac{\partial W}{\partial S}.$$

Annullando la C , come si è fatto nell'appendice precedente, per mezzo della (d) e della funzione arbitraria β che vi figura; sostituendo ad α il suo valore dato dalla (a) e tenendo conto delle semplificazioni ese-

guite; moltiplicando infine ambo i membri per $e^{\int_t^v i(t,v) dv}$, si ritrovano le (32), a meno dell'indice u , c. d. d.

La dimostrazione indicata può estendersi senza alcuna difficoltà al caso che gli strumenti siano in numero di 2, 3, ..., s , e può anche servire a dedurre per altra via le (31).

VI (§ 48). — Variamo le q_j passando alle $q_j + \gamma_j \epsilon_j$, essendo le γ_j funzioni arbitrarie di τ , continue e derivabili, e le ϵ_j quantità

tendenti a zero. La corrispondente variazione di $\Gamma - v$. la (37) — risulta:

$$\delta\Gamma = p_{h+i}(t, \eta) \left\{ \int_t^{t-\eta+\omega} [y(t, \tau, \eta, \mathbf{q}_0 + \gamma_0 \varepsilon_0, \dots, \mathbf{q}_{h+m} + \gamma_{h+m} \varepsilon_{h+m}) - y] d\tau \right\} e^{-\int_t^{t-\eta+\omega} \mathbf{i}(t, v) dv} +$$

$$- \int_t^{t-\eta+\omega} p_j \gamma_j \varepsilon_j e^{-\int_t^\tau \mathbf{i}(t, v) dv} d\tau.$$

Bisogna ora derivare $\delta\Gamma$ a volta a volta rispetto a ciascuna ε ed eguagliare a zero i risultati, dopo avere annullate tutte le ε . Eseguendo si ha:

$$p_{h+i}(t, \eta) e^{-\int_t^{t-\eta+\omega} \mathbf{i}(t, v) dv} \int_t^{t-\eta+\omega} \frac{\partial y}{\partial q_j} \gamma_j d\tau - \int_t^{t-\eta+\omega} p_j \gamma_j e^{-\int_t^\tau \mathbf{i}(t, v) dv} d\tau = 0$$

$j = 0, \dots, h+m.$

Dall'annullarsi di questa espressione per qualsiasi valore di γ_j , si deducono in virtù d'un noto teorema le equazioni:

$$p_{h+i}(t, \eta) \frac{\partial y}{\partial q_j} e^{-\int_t^{t-\eta+\omega} \mathbf{i}(t, v) dv} - p_j e^{-\int_t^\tau \mathbf{i}(t, v) dv} = 0$$

$j = 0, \dots, h+m,$
 $\tau = (t, t - \eta + \omega).$

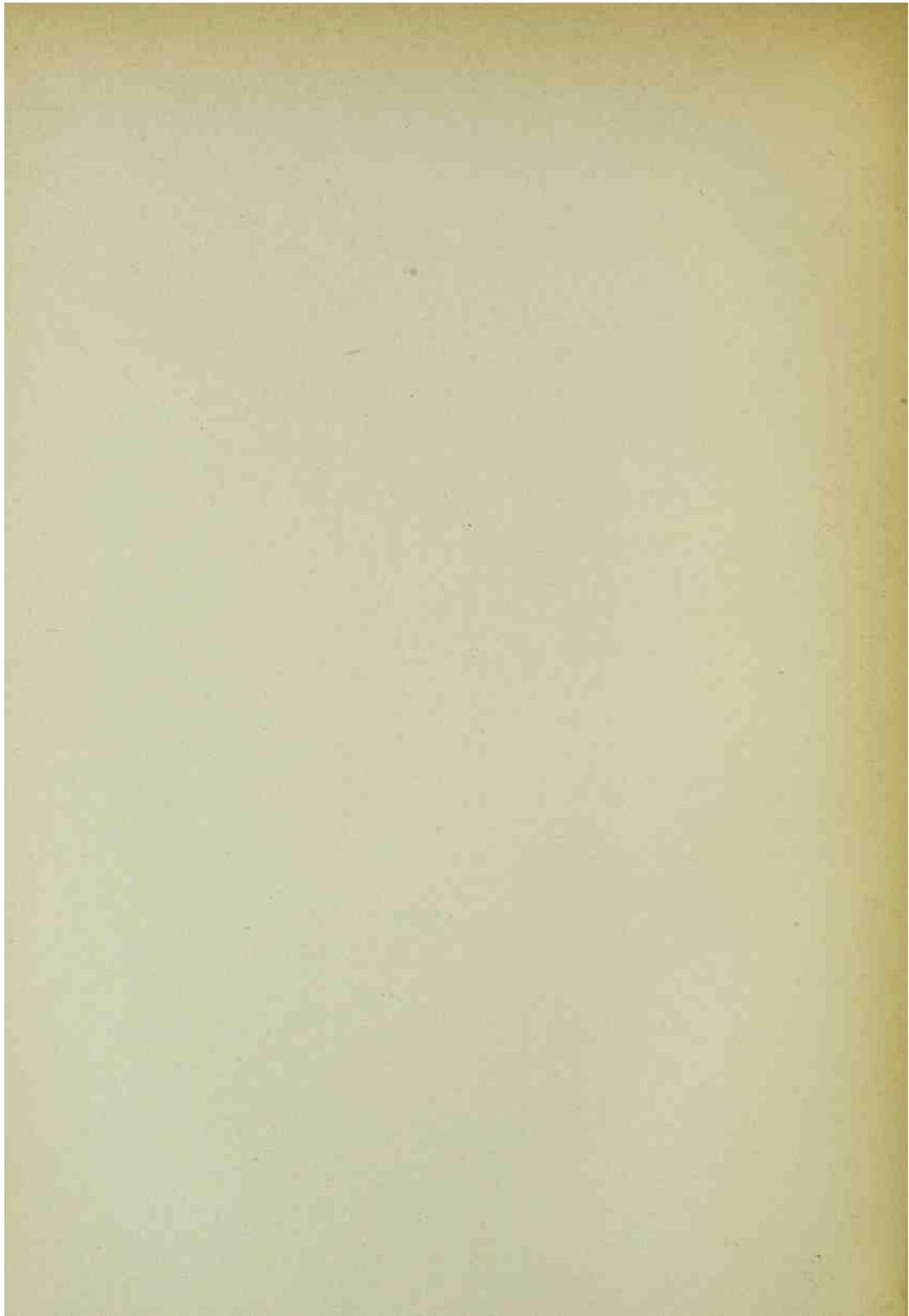
$$\int_t^\tau \mathbf{i}(t, v) dv$$

da cui moltiplicando per $e^{\int_t^\tau \mathbf{i}(t, v) dv}$ si ottengono le (38), c. d. d.

QUADRO DEI PRINCIPALI SIMBOLI

$x = 1, \dots, X$ $b_i = 1, \dots, B_i$	Lavoro (L) $j=0$	Beni (H) $j=1, \dots, h$	Prodotti (M) $j=h+i$ $i=1, \dots, m$	Strumenti (S) $u=1, \dots, s$	Finanzia- menti
Numero dei beni	1	h	m	s	1
Quantità possedute dall'individuo x	$\overbrace{H_{jx}, H_{jx}}$		—	S_{ux}, S_{ux}	F_x, F_x
Tassi dei consumi di x	$\overbrace{C_{jx}, C_{jx}}$		—	S_{ux}, S_{ux}	—
Tassi di scambio di x:					
di servizi e beni non durevoli	$\overbrace{H_{jx} - C_{jx}, H_{jx} - C_{jx}}$		C_{jx}, C_{jx}	—	F_x', F_x'
di beni durevoli	—	H_{jx}', H_{jx}'	—	s_{ux}, s_{ux}	—
Quantità di beni possedute dall'impresa b_i	—	H_{jb_i}, H_{jb_i}	—	S_{ub_i}, S_{ub_i}	F_{b_i}
Tassi d'investimento dell'impresa b_i	$\overbrace{Q_{jb_i}, Q_{jb_i}}$		—	S_{ub_i}, S_{ub_i}	—
Tassi di scambio di b_i :					
di servizi e beni non durevoli	$\overbrace{Q_{jb_i}, Q_{jb_i}}$		—	—	$F_{b_i}^?$
di beni durevoli	—	H_{jb_i}', H_{jb_i}'	—	s_{ub_i}, s_{ub_i}	—
Prezzi previsti ed effettivi:					
di servizi e beni non durevoli	$\overbrace{P_{jx}, P_{jb_i}, P_{jx}}$		—	—	i_x, i_{b_i}, i
di beni durevoli	—	P_{jx}, P_{jb_i}, P_{jx}	—	P_{ux}, P_{ub_i}, P_u	—
Tasso totale d'utilità	U_x, U_x	Durata della produzione			ω_{b_i}
Tasso totale di produttività	Y_{b_i}, Y_{b_i}	Durata degli strumenti			$\sigma_{ux}, \sigma_{ub_i}$
Tasso parziale di produttività	y_{b_i}, y_{b_i}	Durata probabile della vita di individui ed imprese			v_x, v_{b_i}
Reddito delle imprese	R_{b_i}				
Totale delle quote di reddito delle imprese spettanti a x	R_x, R_x				

I N D I C E



INDICE

Prefazione	<i>pag.</i>	1
Introduzione	»	5

CAPITOLO PRIMO

Le equazioni dell'equilibrio dinamico e del moto storico.

I. — SCHEMA DEL SISTEMA ECONOMICO

1. I soggetti e i beni	<i>pag.</i>	12
2. Gli scambi e i problemi dell'equilibrio dinamico	»	14
3. I prezzi previsti	»	15

II. — L'EQUILIBRIO DINAMICO DEI CONSUMATORI.

4. Il problema	»	17
5. L'utilità dei consumi	»	18
6. Finanziamenti, risorse e consumi	»	20
7. Le equazioni dell'equilibrio dinamico e del moto storico	»	22
8. Le leggi d'equilibrio dei consumi	»	25
9. Le funzioni storiche	»	26
10. Seconda forma delle equazioni	»	27
11. La natura economica e finanziaria del risparmio	»	28
12. Cenni illustrativi	»	29

III. — L'EQUILIBRIO DINAMICO DELLE IMPRESE

13. Gli investimenti ed il preventivo tecnico	<i>pag.</i>	32
14. Il preventivo economico e l'equilibrio dinamico degli investimenti	»	34
15. Il reddito da ripartire	»	37
16. Il bilancio finanziario e di cassa	»	38

IV. — L'EQUILIBRIO DINAMICO GENERALE

17. Le equazioni	»	40
18. Il moto storico	»	43

CAPITOLO SECONDO

Alcune estensioni della teoria.

I. — IL « BISOGNO DI ELARGIRE » ED I « VERSAMENTI » FRA CONSUMATORI

19. Il « bisogno di elargire »	»	45
20. I « versamenti » fra consumatori.	»	47

II. — I BENI DUREVOLI PERPETUI NELLE ECONOMIE DI CONSUMO

21. Il problema : :	»	48
22. Le spese di « mantenimento »	»	49
23. Le equazioni dell'equilibrio dinamico	»	51
24. L'equilibrio degli investimenti	»	53
25. Investimenti e risparmio	»	54
26. Beni di godimento e beni da reddito	»	56
27. L'equilibrio generale del mercato	»	57

III. — I BENI DUREVOLI PERPETUI NELLE IMPRESE

28. I vincoli ai beni durevoli	»	58
29. Tassi d'investimento, di scambio e di produttività	»	59
30. Il preventivo tecnico-economico e gli investimenti	»	60
31. Il reddito da ripartire	»	63
32. Il bilancio finanziario	»	64
33. L'equilibrio generale del mercato	»	65

IV. — GLI STRUMENTI NELLE ECONOMIE DI CONSUMO

34. Vincoli ai beni durevoli temporanei	<i>pag</i>	66
35. Le equazioni dell'equilibrio dinamico	»	67
36. L'equilibrio dei consumi	»	69
37. I consumi, i finanziamenti, la domanda di strumenti	»	70
38. L'equilibrio generale del mercato	»	71

V. — GLI STRUMENTI NELLE IMPRESE

39. L'impostazione dinamica del problema	»	72
40. Il piano tecnico ed economico degli investimenti	»	73
41. L'equilibrio dinamico degli investimenti	»	76
42. Ammortamenti e reddito da ripartire	»	77
43. Capitale circolante, capitale fisso e bilancio finanziario	»	80
44. Nuove equazioni nell'equilibrio generale	»	81
45. Qualche riflessione	»	82

VI. — L'EQUILIBRIO DINAMICO D'IMPRESA

NEI CASI DELLA CONCORRENZA IMPERFETTA E DEL MONOPOLIO

46. Le equazioni	»	83
----------------------------	---	----

VII. — SCHEMA PIÙ COMPLESSO DELLA PRODUZIONE

47. Il preventivo tecnico	»	86
48. Il piano economico	»	88
49. I tassi effettivi degli investimenti	»	89
50. Risultati di gestione e reddito da ripartire	»	91
51. Bilancio finanziario	»	92

CAPITOLO III.

Cenni illustrativi della teoria.

52. L'equilibrio dinamico ed il moto storico	»	93
53. Le previsioni dei consumatori	»	94
54. Le previsioni delle imprese	»	95

55. Il saggio dell'interesse	pag.	96
56. La dinamica dei consumi e dei processi produttivi	»	97
57. Il numero delle imprese ed i gruppi industriali	»	98
58. Teoria dinamica. Forze determinanti e forze risultanti	»	100
59. Concezione spirituale della realtà	»	103
60. I problemi dell'economia dinamica	»	103

APPENDICI

I (§ 7)	»	107
II (§ 23)	»	108
III (§ 30)	»	109
IV (§ 35)	»	109
V (§ 40)	»	113
VI (§ 48)	»	114
Quadro dei principali simboli	»	116

ERRATA - CORRIGE

pag. 23	rigo	4	\leq	leggi	maggiore o minore
» 33	nota (17)	4	Tinberger	»	Tinbergen
» 35	formula	(5)	Y	»	∂Y
» 36	»	(6)	Q	»	∂Q
» 38	»	(7)	$i=0$	»	$j=0$
» 39	»	(8)	$F_{b_i} =$	»	$F_{b_i} =$
» 46	rigo	10	\int_t^τ	»	$-\int_t^\tau$
» 47	»	penultimo	\leq	»	maggiore o minore
» 51	»	11	e quindi le	»	e quindi la
» 55	»	11	H	»	H'
» 64	formula	(20)	=1	»	$j=1$
» »	»	(21)	=0	»	$j=0$
» 72	rigo	4	Y	»	Q
» 75	»	17	1	»	o

