WORKING PAPERS

W.P. n. 31

FONDAMENTI PER UN APPROCCIO UNIFICANTE ALL'ANALISI DEL COMPORTAMENTO DELLA DOMANDA IN UN SISTEMA LOCALIZZAZIONI - TRASPORTI

C.S. Bertuglia, G. Leonardi, S. Occelli, G.A. Rabino, R. Tadei

ires ISTITUTO RICERCHE ECONOMICO - SOCIALI DEL PIEMONTE

Working Paper n. 31

W.P. n. 31

FONDAMENTI PER UN APPROCCIO UNIFICANTE ALL'ANALISI DEL COMPORTAMENTO DELLA DOMANDA IN UN SISTEMA LOCALIZZAZIONI - TRASPORTI

C.S. Bertuglia, G. Leonardi, S. Occelli, G.A. Rabino, R. Tadei

Gennaio 1984

Studio condotto nell'ambito del P.F.T.
Sottoprogetto 2, contratto CNR-IRES n. 82.00450.93

1. Introduzione *

L'analisi delle interrelazioni tra localizzazioni e trasporti costituisce una tematica fondamentale, presente, seppure con ottiche e gradi di approfondimento diversi, nella maggior parte della modellistica urbana e regionale.

Ciò, ovviamente, non sorprende data la molteplicità degli aspetti (nonché dei problemi) che le interrelazioni tra localizzazioni e trasporti fanno riconoscere, e che emergono con particolare evidenza qualora si voglia fornire un quadro sistematico dello stato dell'arte degli studi in questo campo e, soprattutto, degli avanzamenti più recenti e delle

(*) Questo saggio è ricavato da una parte di un lavoro assai ampio: Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (1983) Interrelazioni tra localizzazioni e trasporti: stato dell'arte, proposte per un quadro di riferimento unificante e possibili linee di sviluppo. Tale lavoro costituisce la relazione introduttiva al volume: Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (a cura) Nuove teorie e metodi per l'analisi delle relazioni tra localizzazioni e trasporti. Tale volume è il risultato dello studio condotto nell'ambito del PFT - Progetto Finalizzato Trasporti (contratto CNR - IRES n. 82.00450.93) e consegnato al P.F.T. nel mese di dicembre 1983.

potenzialità di sviluppo futuro del campo stesso (cfr.: Bertuglia et al., 1983).

In questo saggio ci si concentra sull'analisi di un particolare aspetto derivante dalle interrelazioni suddette. Precisamente, dato un sistema localizzazioni-trasporti si affronta l'analisi del processo di scelta, da parte degli utenti del sistema, tra le diverse alternative esistenti in tale sistema (in termini, ad esempio, di destinazioni degli spostamenti, di percorsi da effettuare o di servizi di trasporto da utilizzare).

Si noti che l'analisi del comportamento della domanda - pur focalizzandosi, come detto, su un aspetto particolare e certamente non esaustivo della intera problematica delle interrelazioni localizzazioni-trasporti - costituisce, nondimeno, uno degli oggetti di interesse fondamentali, ed in larga misura dominanti, negli studi concernenti le interrelazioni suddette.

In questo saggio, in particolare, la discussione viene condotta ad un livello essenzialmente teorico-metodologico, cosa che consente, non solo di individuare le relazioni esistenti tra i diversi approcci modellistici al comportamento della domanda, ma, e soprattutto, di porre delle solide basi per l'integrazione stessa di tali approcci, che sicuramente potrà portare, in un futuro non lontano, alla formulazione di un nuovo e più potente approccio.

2. Approcci esistenti per l'analisi del comportamento della domanda

I modelli di domanda più importanti, in un sistema localizzazioni-trasporti, sono quelli inerenti alle scelte degli utenti di tale sistema tra diverse alternative, in genere spazialmente differenziate. Più esplicitamente interessano i modelli di scelta delle destinazioni degli spostamenti, i modelli di scelta dei percorsi su una rete, i modelli di scelta dei mezzi di trasporto con cui effettuare lo spostamento.

Al di là del contenuto specifico, diverso da caso a caso, esiste una similarità fondamentale nella struttura di tali modelli, in quanto tutti contemplano una situazione di scelta tra un insieme discreto di alternative (siano esse destinazioni, percorsi o mezzi di trasporto) e tentano di spiegare il meccanismo di scelta in funzione di caratteristiche delle alternative (attrattività, utilità, capacità ecc.) e di misure di distanza o costo che riducono la possibilità di accedere al loro uso.

Una prima distinzione può essere fatta tra modelli di scelta statici e modelli di scelta dinamici.

Anche se in quanto segue ci si concentrerà esclusivamente sull' analisi comparativa dei modelli statici, è bene chiarire che tale scelta non è dettata da motivi di importanza. Da un lato, va riconosciuto che la letteratura sui modelli di scelta dinamici è molto limitata e sporadica, quindi insufficiente per condurre una vera e propria analisi comparativa. Da un altro lato, si può, in un certo senso, dire che un comportamento di scelta dinamico è una successione nel tempo di scelte localmente stati-che, per cui il suo meccanismo fondamentale è riconducibile a quello che verrà qui analizzato. Ciò che differenzia un modello di scelta dinamico da uno statico è, essenzialmente, il fatto che gli attributi delle alternative oggetto di scelta (in genere, riassunti in una misura di utilità) non sono costanti, ma variano nel tempo in funzione delle interazioni reciproche tra gli individui, nonché delle interazioni tra questi e l'ambiente fisico in cui hanno luogo le scelte. Esempi tipici di attributi delle alternative, che variano per tali interazioni, sono la capacità limitata (ad esempio, di uno stock edilizio o di un tronco stradale), i prezzi, nonché tutte le esternalità negative derivanti dalla competizione tra diversi individui per l'uso di alternative limitate. Tali effetti e la loro dinamica sono introdotti esplicitamente nei saggi di de Palma e Lefèvre (1983), Smith (1983b), Weibull (1983) e Leonardi (1983).

Tuttavia, fermo restando che l'introduzione della dinamica costituisce senz'altro una delle più interessanti direzioni di sviluppo futuro, va ancora osservato che ciò concerne più l'analisi delle variazioni degli attributi delle alternative, che non il meccanismo fondamentale che ne produce la valutazione e la scelta. Tale meccanismo, di natura localmente statica, è appunto l'oggetto dell'analisi che segue e costituisce l'elemento fondamentale alla base di tutti i modelli di scelta, sia statici sia dinamici.

Un' ulteriore classificazione può essere basata sulla distinzione tra modelli aggregati, cioè basati su regolarità osservate a livello macroscopico, e modelli disaggregati, cioè basati su esplicite assunzioni (in genere, microeconomiche) relative al processo di scelta individuale.

Tra i primi si annoverano i modelli basati sulla massimizzazione dell'entropia e quelli basati sul principio dell'efficienza dei costi; tra i secondi si annoverano i modelli classici di massimizzazione dell'utilità, tipici dell'economia urbana, e quelli basati sulla teoria delle utilità casuali.

Ciò che può sembrare sorprendente è che presupposti teorici così disparati, ed apparentemente in conflitto, spesso si traducono in modelli sostanzialmente identici. Più esattamente, tutti gli approcci che tentano di introdurre effetti di dispersione probabilistica sulle scelte - cioè, la massimizzazione dell'entropia, l'efficienza dei costi e le utilità casuali - producono, sotto assunzioni abbastanza blande, il cosiddetto modello logit multinominale.

In quanto segue verranno analizzati gli aspetti teorici di tali similarità e le relazioni che permettono di passare da un approccio all'altro.

3. Relazione tra massimizzazione dell'entropia ed efficienza rispetto ai costi

L'equivalenza tra i due principi è dimostrata nel contributo di Smith (1983b), a cui si rimanda per i dettagli tecnici. Qui si accenneranno solo gli aspetti salienti dei due metodi e di tale equivalenza.

Va detto per inciso che Smith applica il principio ad un problema di assegnazione su una rete congestionata, ma ovviamente esso può essere esteso a qualunque altro problema di scelta tra alternative discrete. Pertanto, l'analisi comparativa tra i due principi può essere basata sul più semplice problema di scelta tra alternative discrete che si possa considerare e che è il seguente.

Si abbia una popolazione P di utenti ed un insieme di alternative j $j = 1,\ldots,n$. A ciascuna alternativa j sia associato un numero reale v_j, che si può chiamare utilità dell'alternativa j (per la popolazione considerata) e che misura l'attrattività od i vantaggi relativi, associati alla scelta dell'alternativa j. In molte applicazioni, v_j sarà composto sia da un termine di costo di accesso all'alternativa j (ad esempio, costo di trasporto) sia da un termine di attrattività specifica dell'alternativa j (ad esempio, dimensione di un centro di vendita, capacità ecc.). Tuttavia, dal punto di vista teorico comparativo, che è quello che qui interessa, tale distinzione e disaggregazione non è rilevante, per cui è conveniente considerare un'unica valutazione numerica v_j dell'alternatività j, che verrà appunto chiamata la sua "utilità".

Il modo in cui il problema di determinare la distribuzione delle scelte della popolazione P tra le varie alternative verrebbe affrontato secondo la massimizzazione dell'entropia, come proposta da Wilson (1970, 1974), è ben noto. Qui verrà richiamato. Supponendo che tutte le configurazioni possibili siano equiprobabili (salvo vincoli) a livello microscopico, la probabilità di osservare una certa distribuzione a livello aggregato sarà proporzionale al numero di configurazioni possibili a livello microscopico che producono la detta distribuzione a livello macroscopico.

Sia T_j il numero di utenti che scelgono l'alternativa j.

Il vettore $T = [T_1, \ldots, T_n]$ rappresenta pertanto la distribuzione delle scelte a livello aggregato. Ovviamente, vale il vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} T_j = P. \qquad (1)$$

In base alle ipotesi fatte, la probabilità di osservare il vettore T è proporzionale a:

$$W(T) = \frac{P!}{\prod_{j=1}^{n} T_j!} . \tag{2}$$

L'ulteriore ipotesi che P e T_j, $j = 1,\ldots, n$, siano grandi rende lecito l'uso dell'approssimazione (Stirling):

$$\ln T_j! \sim T_j (\ln T_j - 1) \tag{3}$$

Pertanto, qualora si voglia cercare la distribuzione T più probabile, cioè che rende massima $W(T)$, per grandi numeri essa è, con buona approssimazione, la distribuzione che rende massima la quantità:

$$\ln W(T) = - \sum_j \ln T_j! + \ln P!$$

(ciò perché la ricerca del massimo non è affetta da una trasformazione monotonica crescente della funzione massimizzanda). Trascurando il termine costante $\ln P!$, che non influenza l'ubicazione del massimo, ed usando l'approssimazione (3), si ottiene che la distribuzione T più probabile è quella che rende massima la funzione:

$$E(T) = - \sum_j T_j (\ln T_j - 1). \tag{4}$$

Tale funzione è nota come entropia della distribuzione T.

Secondo Wilson, ed in analogia con l'uso che si fa del metodo in meccanica statistica, la ricerca del massimo di $E(T)$ è soggetta non solo al vincolo (1), ma anche ad un ulteriore vincolo di conservazione di qualche sorta di "energia totale" del sistema.

Wilson identifica nel costo (o tempo) totale di trasporto tale e —

nergia; nella formulazione qui usata, ciò si traduce e generalizza nell' utilità totale del sistema, cioè la quantità:

$$\sum_j T_j v_j . \tag{5}$$

In base a quanto sopra detto, la distribuzione T più probabile è la soluzione del problema di programmazione matematica:

$$\max_T \{E(T): \sum_{j=1}^n T_j = P, \sum_{j=1}^n T_j v_j = V\} , \tag{6}$$

in cui V è il livello prefissato di utilità totale. E' facilmente verificabile che la funzione $E(T)$ è concava; pertanto, il problema (6) è un problema di programmazione concava (essendo soggetto a vincoli lineari). Ciò significa che il metodo classico dei moltiplicatori di Lagrange può essere usato per determinarne l'unica soluzione.

Il lagrangiano corrispondente al problema (6) è:

$$\mathcal{L}(T,\nu,\mu) = E(T) - \nu \, (P - \sum_{j=1}^n T_j) - \mu \, (V - \sum_{j=1}^n T_j v_j), \tag{7}$$

in cui ν e μ sono i moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli (1) e (5), rispettivamente.

Annullando le derivate di $\mathcal{L}$ rispetto a ciascun T_j si ottiene:

$$\ln T_j = - (\nu + \mu \, v_j) ,$$

cioè:

$$T_j = k\, e^{-\mu v_j} \tag{8}$$

in cui $k = e^{-\nu}$.

Il vincolo (1) permette di eliminare la costante k dalla (8); inoltre, non si perde in generalità nel definire:

$$\beta = -\mu$$

(di fatto, β è empiricamente sempre non negativo). Si arriva pertanto a:

$$T_j = P \frac{e^{\beta v_j}}{\sum_j e^{\beta v_j}}\ , \tag{9}$$

che è la formula del modello logit multinomiale, nella sua forma più semplice. Il valore della funzione $E(T)$ associato alla distribuzione (9) è dato da:

$$E(T) = - \sum_j T_j \left(\beta v_j + \ln P - \ln \sum_j e^{\beta v_j} - 1 \right. =$$

$$= P \ln \sum_j e^{\beta v_j} + \text{costanti}$$

e, poiché l'entropia è in genere definita a meno di costanti additive arbitrarie, è lecito ridefinirla in modo che sia:

$$E(T) = P \ln \sum_j e^{\beta v_j} . \qquad (10)$$

Il principio della massimizzazione dell'entropia, essendo meccanico-statistico, non ha un'interpretazione macroeconomica diretta. Ciononostante un comportamento economico viene indotto nella soluzione (9) che mostra una tendenza delle scelte a concentrarsi sulle alternative con utilità più alta.

Tale tendenza, ottenuta da Wilson come risultato, è invece usata da Smith (1978, 1983a) come assunzione di partenza del suo principio di "efficienza rispetto ai costi" (che, data la formulazione qui usata, è più appropriatamente ribatezzato "efficienza rispetto alla utilità").

Si esamina brevemente come il semplice problema di distribuzione verrebbe affrontato secondo l'approccio di Smith (1978).

Si consideri ancora una popolazione totale P, un insieme di alternative $R = \{ j : j = 1, \ldots, n \}$, una utilità v_j associata ad ogni alternativa $j \in R$.

Si denoti con:

$$t = (r_1, \ldots, r_P) \quad ; \quad r_k \in R,\ k = 1, \ldots, P,$$

una configurazione di scelte, costituita dalla lista delle alternative scelte dal primo, secondo, .., P-esimo individuo. In diverse occasioni (ad esempio: in giorni diversi) si osserveranno in generale configurazioni t diverse.

Sia $T = (t_1, \ldots, t_m)$ una tale successione di configurazioni e si indichi con $Q(T)$ la probabilità di osservare T. Smith (1983) dimostra che la forma di $Q(T)$ è completamente determinata dalle seguenti due assunzioni, che costituiscono l'essenza del metodo di efficienza delle utilità.

Assunzione 1 (Indipendenza)

I termini della successione T sono indipendenti. Da ciò consegue:

$$Q(T) = \prod_{k=1}^{m} Q(t_k).$$

Assunzione 2 (Principio di efficienza delle utilità)

Si definisca:

$$\overline{V}(T) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} V(t_k) \quad \text{utilità media della successione } T,$$

in cui:

$$V(t) = \sum_{j=1} v(r_j) \tag{11}$$

indica l'utilità cumulata su tutti i P utenti della configurazione $t=(r_1,..,r_P)$.

Se, per due successioni T, T'

$$\bar{V}(T) \geq \bar{V}(T'),$$

allora

$$Q(T) \geq Q(T') \quad .$$

L'assunzione 2 introduce una condizione di regolarità macroeconomica esplicita, ma molto blanda (ad esempio, assai più blanda della massimizzazione dell'utilità). Essa dice semplicemente che è più probabile osservare successioni di configurazioni di scelte con utilità mediamente alte, che non viceversa.

Smith mostra che dalle assunzioni 1 e 2 discende che:

$$Q(t) = k\, e^{\beta V(t)} \quad , \quad \beta \geq 0, \tag{12}$$

in cui k è una costante di normalizzazione e β è un parametro.

Il risultato (12) e la definizione (11) sono sufficienti a mostrare l'equivalenza tra principio di efficienza delle utilità e principio di massimizzazione dell'entropia.

Infatti, sia $F = (F_1, \ldots, F_n)$ il vettore della distribuzione dei P utenti tra le alternative 1, ...,n, tale che:

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = P \tag{13}$$

e si considerino tutte le configurazioni di scelte t che producono lo stesso vettore F. Il numero totale di tali configurazioni è dato da:

$$\frac{P!}{\prod_{j=1}^{n} F_j!} \qquad (14)$$

Inoltre, esse hanno tutte eguale utilità cumulata:

$$V(t) = V(F) = \sum_{j=1}^{n} F_j v_j$$

e, pertanto, sono equiprobabili con probabilità data dalla (12):

$$k \exp (\beta \sum_{j=1}^{n} F_j v_j) . \qquad (15)$$

Combinando la (14) e la (15) si ha che la probabilità associata ad una distribuzione F è proporzionale a:

$$W(F) = \frac{P!}{\prod_{j=1}^{n} F_j!} \exp (\beta \sum_{j=1}^{n} F_j v_j) \qquad (16)$$

e la distribuzione F più probabile è determinabile come soluzione del problema di programmazione matematica:

$$\max_F \{ \ln W(F) : \sum_{j=1}^{n} F_j = P \} . \qquad (17)$$

Usando come di consueto l'assunzione che le F_j siano sufficientemente grandi e l'approssimazione di Stirling

$$\ln F_j! \sim F_j (\ln F_j - 1) ,$$

si ha che:

$$\ln W(F) = \ln P! + \beta \sum_{j=1}^{n} F_j v_j - \sum_{j=1}^{n} \ln F_j! \sim$$

$$\sim - \sum_{j=1}^{n} F_j (\ln F_j - 1) + \beta \sum_{j=1}^{n} F_j v_j + \ln P!$$

Ricordando la (4) (definizione della funzione entropia) e trascurando le costanti additive, si ottiene che il problema (17) è equivalente al problema

$$\max_F \{E(F) + \beta \sum_{j=1}^{n} F_j v_j \quad : \quad \sum_{j=1}^{n} F_j = P \} . \qquad (18)$$

E' evidente che il problema (18) è un rilassamento lagrangiano del problema (6), in quanto un vincolo del tipo:

$$\sum_{j=1}^{n} F_j v_j = V$$

(quale appare nel problema (6) è sostituito dal termine:

$$\beta \sum_{j=1}^{n} F_j v_j$$

aggiunto alla funzione obiettivo.

Pertanto, se il valore numerico del parametro β usato nel problema (18) è uguale a quello del moltiplicatore di Lagrange β relativo al secondo vincolo del problema (6), i problemi (6) e (18) sono completamente equivalenti, cioè hanno la stessa soluzione ottimale e lo stesso valore ottimale della funzione obiettivo. Da tale equivalenza e dalla (9) discende che la distribuzione F più probabile basata sul principio dell'efficienza delle utilità è:

$$F_j = P \frac{e^{\beta v_j}}{\sum_j e^{\beta v_j}} . \qquad (19)$$

4. Relazione tra teoria delle utilità casuali e massimizzazione dell'entropia

In 3. si è dimostrata l'equivalenza tra due principi macroscopici, uno meccanico-statistico (la massimizzazione dell'entropia) e l'altro macroeconomico (l'efficienza delle utilità). In ambedue i casi si tratta di principi basati su assunzioni piuttosto blande e che vincolano assai poco il comportamento individuale. In questo punto verrà esaminata una teoria esplicitamente basata su assunzioni microscopiche, la teoria delle utilità casuali, e verrà determinato in quali condizioni essa produce risultati equivalenti alle teorie macroscopiche di cui in 3.

Si consideri ancora la situazione di scelta discussa in 3., ma si esamini in particolare il comportamento di un singolo individuo di fronte alle alternative j, $j=1, \ldots, n$.

Negli approcci aggregati discussi in 3., è stato introdotto un insieme di pesi numerici v_j, chiamati "utilità" (anche se nessuna delle due teorie finora considerate è, in senso stretto, utilitarista), che misurano la diversa attrattività relativa delle alternative.

In una visione utilitaristica tradizionale, qualora i v_j venissero interpretati come vere e proprie funzioni di utilità definite da ciascun membro della popolazione P sull'insieme delle alternative, e qualora la popolazione in oggetto fosse composta di P membri perfettamente omogenei rispetto alla valutazione delle alternative (cioè, con la stessa funzione di utilità), allora un individuo preso a caso tra i P individui totali sceglierebbe l'alternativa k per cui l'utilità v_k è massima:

$$v_k = \max_j v_j \quad . \tag{20}$$

L'ipotesi (20), che si definirà della massimizzazione dell'utilità deterministica, caratterizza buona parte dei modelli neoclassici di economia urbana.

Il principio della scelta dell'alternativa di utilità massima, o di costo minimo, costituisce anche la base della teoria classica della localizzazione delle attività economiche e dei servizi, a partire dallo schema weberiano, per arrivare ai modelli di assegnazione e di localizzazione contemplati dalla Ricerca Operativa. [Alcuni tra i principali modelli di questo tipo sono descritti e discussi, ad esempio, in Beckmann(1983) ed in Colorni (1983)].

Tuttavia, è noto che tale principio produce configurazioni di scelte poco realistiche: se la popolazione P fosse effettivamente omogenea, nella realtà si osserverebbe che la totalità delle scelte si concentrerebbe sull'alternativa k, a cui corrisponde l'utilità v_k massima, mentre tutte le altre alternative $j \neq k$, per cui $v_j < v_k$, resterebbero inutilizzate.

Un modo per eliminare tale aspetto indesiderato è quello di assumere che la popolazione P sia eterogenea rispetto alla valutazione delle alternative, cioè che ciascun individuo abbia diverse funzioni di utilità. Poiché una osservazione diretta delle funzioni di utilità di ciascun singolo individuo è impossibile, anche la descrizione in termini deterministici di un processo di scelta disaggregato con popolazione eterogenea è impossibile.

La teoria delle utilità casuali, proposta da Luce (1959) e sviluppata da Manski (1973), Domencich e McFadden (1975), Ben-Akiva e Lerman (1979), affronta il problema introducendo esplicitamente elementi stocastici nel processo di scelta. Ciò che la teoria delle utilità casuali suggerisce per risolvere il problema è di dare la seguente descrizione in termini probabilistici.

Si supponga che un individuo estratto a caso dalla popolazione P assegni all'alternativa j l'utilità:

$$\tilde{u}_j = v_j + \tilde{\theta}_j , \tag{21}$$

in cui v_j sono le quantità già usate in precedenza, ed interpretabili come componenti deterministiche dell'utilità, identiche per tutti gli individui (e dipendenti da caratteristiche osservabili dell'alternativa j), mentre $\tilde{\theta}_j$ sono variabili casuali, interpretabili come componenti stocastiche dell'utilità, variabili da individuo ad individuo e indipendenti da caratteristiche osservabili delle alternative.

Un'ipotesi semplificatrice spesso introdotta è che $\{\tilde{\theta}_j\}$ sia una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, per le quali si assume che esista una distribuzione di probabilità:

$$F(x) = Pr\{\tilde{\theta}_j \leq x\} , \quad j = 1, \ldots, n . \tag{22}$$

Le assunzioni (20) e (21) permettono di derivare formule esplicite per la distribuzione dell'utilità massima e le probabilità di scelta tra le alternative.

Innanzitutto, dalle (20) e (21) segue che la distribuzione di probabilità dell'utilità complessiva dell'alternativa j è data da:

$$P_r\{\tilde{U}_j \le x\} = P_r\{v_j + \tilde{\theta}_j \le x\} = P_r\{\tilde{\theta}_j \le x - v_j\} = \tag{23}$$
$$= F(x - v_j).$$

Pertanto, definendo la variabile casuale:

$$\tilde{u} = \max_j \tilde{u}_j$$

e notando l'equivalenza tra i due eventi:

$$\tilde{u} \le x$$

e

$$\tilde{u}_j \le x \qquad \text{per tutti i } j = 1, \ldots, n,$$

si ha che:

$$H(x) = P_r\{\tilde{u} \le x\} = P_r\{\tilde{u}_1 \le x, \ldots, \tilde{u}_n \le x\} = \tag{24}$$
$$= \prod_{j=1}^{n} P_r\{\tilde{u}_j \le x\} = \prod_{j=1}^{n} F(x - v_j).$$

La densità di probabilità $h(x)$ associata ad $H(x)$ è:

$$h(x) = H'(x) = \sum_{j=1}^{n} F'(x-v_j) \prod_{k\neq j} F(x-v_k) \tag{25}$$

e l'utilità attesa associata alla scelta di una alternativa di utilità complessiva massima è:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\, H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, h(x)\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{j=1}^{n} F'(x-v_j) \prod_{k\neq j} F(x-v_k)\, dx \; . \end{aligned} \tag{26}$$

Infine, la probabilità di scelta dell'alternativa j, cioè la probabilità dell'evento:

$$\tilde{u}_j = \max_k \tilde{u}_k$$

è data da

$$P_j = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x-v_j) \prod_{k\neq j} F(x-v_k)\, dx, \tag{27}$$

e dalla (25) discende che:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx = 1.$$

Qualora vengano introdotte assunzioni specifiche sulla forma della distribuzione F(x) delle componenti casuali dell'utilità, le equazioni (24) - (27) assumono forme esplicite diverse. Un'importanza particolare è stata data nella teoria e nelle applicazioni all'assunzione:

$$F(x) = \exp(-e^{-\beta x}) . \tag{28}$$

La distribuzione (28) è nota come distribuzione dei valori estremi, o distribuzione di Gumbel. La sua importanza è dovuta al fatto che essa implica il modello logit multinomiale, già ottenuto nella (9) e nella (19). Ciò può essere mostrato più facilmente introducendo la trasformazione:

$$\tilde{y}_j = e^{-\beta \tilde{u}_j} = e^{-\beta(\tilde{\theta}_j + v_j)} . \tag{29}$$

La successione di variabili casuali $\{\tilde{y}_j\}$ è una trasformazione monotona decrescente della successione delle utilità totali $\{\tilde{u}_j\}$, per cui $\tilde{y}_j$ può essere considerato un indicatore di disutilità dell'alternativa j, $j = 1,\ldots,n$. Si constata facilmente che le variabili casuali $\tilde{y}_j$ sono distribuite esponenzialmente. Infatti, posto:

$$V_j = e^{\beta v_j} , \tag{30}$$

si ha dalla (28):

$$\begin{aligned} G_j(x) &= P_r\{e^{-\beta(\tilde{\theta}_j + v_j)} \leq x\} = P_r\{\tilde{\theta}_j > -\frac{1}{\beta}\ln x - v_j\} = \\ &= 1 - F(-\frac{1}{\beta}\ln x - v_j) = 1 - e^{-V_j x} . \end{aligned} \tag{31}$$

L'alternativa j viene scelta se la sua disutilità $\tilde{y}_j$ è la minima, il che avviene con probabilità:

$$P_j = \int_0^\infty G_j'(x) \prod_{k \neq j} [1 - G_k(x)]\, dx =$$

$$= V_j \int_0^\infty e^{-x \sum_k V_k} dx = \frac{V_j}{\sum_k V_k}$$

o, sostituendo dalla (30):

$$P_j = \frac{e^{\beta v_j}}{\sum_k e^{\beta v_k}} . \qquad (32)$$

La (32) è chiaramente identica alla (9) ed alla (19). La distribuzione della variabile casuale:

$$\tilde{y} = \min_j e^{-\beta \tilde{u}_j} = e^{-\beta \tilde{u}}$$

è data da:

$$L(x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} [1 - G_j(x)] = 1 - e^{-\Phi x} , \qquad (33)$$

avendo posto $\Phi = \sum_j V_j = \sum_j e^{\beta v_j}$.

Il valore medio di $\tilde{u}$, esprimibile in funzione di $\tilde{y}$ tramite l'equazione:

$$\tilde{u} = -\frac{1}{\beta} \ln \tilde{y}$$

è pertanto dato da:

$$V = E\{\tilde{u}\} = E\{-\frac{1}{\beta}\ln \tilde{y}\} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \Phi e^{-\Phi x} \ln x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\infty (\ln \Phi - \ln y)\, e^{-y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\beta}\ln \Phi + \frac{\gamma}{\beta}, \qquad (34)$$

in cui γ è la costante di Eulero.

E' importante notare che l'utilità attesa data dalla (34), a parte la costante additiva γ/β - che può essere ignorata - e la costante moltiplicativa $\frac{1}{\beta}$, è identica al secondo fattore nell'espressione a destra della (10). In effetti, il termine

$$V = \frac{1}{\beta}\ln \Phi = \frac{1}{\beta}\ln \sum_j e^{\beta v_j}$$

è l'utilità attesa di una scelta ottimale per un singolo individuo. L'utilità attesa aggregata su una popolazione di P individui è pertanto:

$$PV = \frac{1}{\beta} P \ln \sum_j e^{\beta v_j} \qquad (35)$$

ed il confronto della (35) con la (10) nostra che l'utilità aggregata, così come è ottenuta dalla teoria delle utilità casuali sotto l'assunzione (28), è formalmente identica (a meno di una costante di proporzionalità) al valore massimo della funzione entropia nel problema di ottimizzazione (6).

Questa analogia suggerisce quindi una interpretazione microeconomica dell'entropia, nonché una sostanziale equivalenza tra teoria delle utilità casuali e massimizzazione dell'entropia (e, di conseguenza, efficienza delle utilità).

Vi è, tuttavia, un aspetto, a prima vista, insoddisfacente nelle considerazioni svolte: mentre sia la massimizzazione dell'entropia sia l' efficienza delle utilità sono principi fondati su assunzioni molto blande e poco vincolanti a livello di comportamento individuale, i risultati (32) e (35) sono stati ottenuti usando un' assunzione molto specifica circa l'eterogeneità delle preferenze, cioè circa la distribuzione (28).

A prima vista, non è assolutamente evidente che la (28) abbia fondamenti teorici generali e non sia un'assunzione ad hoc, scelta per semplicità di calcolo.

In realtà, è possibile derivare la (28) come risultato asintotico da assunzioni più blande, sfruttando le proprietà dei massimi di successioni di variabili casuali. Tale possibilità, apparentemente ignorata dalla letteratura precedente, che implicitamente considera l'assunzione (28) come necessaria alla derivazione del modello logit (vedi, ad esempio, Domencich e McFadden, 1975), è stata esplorata e sviluppata in alcuni lavori recenti da Leonardi (1981, 1982).

Onde chiarire tale punto di vista, si assuma che le alternative siano suddivise in n classi omogenee $1, 2, \ldots, j, \ldots n$, e sia:

v_j l'utilità deterministica associata ad un'alternativa della classe j.

Si assuma, inoltre, che ciascun individuo, onde scegliere, consideri un campione di alternative estratte sequenzialmente, e sia:

w_j la probabilità che ad una data estrazione venga estratta un'alternativa appartenente alla classe j, $w_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Se $F(x) = P_r\{\tilde{\theta}_j \leq x\}$ è la distribuzione di probabilità delle utilità casuali, che per ora si considera generica, si ha che la distribuzione dell'utilità associata ad una qualunque alternativa, ad una data estrazione, è:

$$G(x) = \sum_j w_j \, F(x-v_j) \tag{36}$$

per via della (23). La distribuzione dell'utilità massima in un campione di H alternative è pertanto:

$$H_N(x) = G^N(x) \tag{37}$$

e ciò vale per qualunque distribuzione $F(x)$. Si introduca adesso la seguente ipotesi su $F(x)$:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1-F(x+y)}{1-F(y)} = e^{-\beta x}, \quad \beta > 0. \tag{38}$$

Si può facilmente verificare che la proprietà (38) è equivalente a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{1-F(x)} = \beta \;, \quad \beta > 0. \tag{39}$$

La (38), o la (39), caratterizza una famiglia di distribuzioni di probabilità per le quali vale il seguente

Teorema 1 (Leonardi).

Sotto l'ipotesi (38), si ha:

$$\lim_{N\to\infty} G^N\left(x + \frac{1}{\beta} \ln \Phi + a_N\right) = \exp\left(-e^{-\beta x}\right), \tag{40}$$

in cui:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} w_j\, e^{\beta v_j} \tag{41}$$

ed a_N è la radice dell'equazione:

$$1-F(a_N) = 1/N. \tag{42}$$

Dimostrazione del teorema 1

Dalla (42) e dalla proprietà (48) segue che:

$$\lim_{N\to\infty} F(x-v_j + \frac{1}{\beta}\ln\Phi + a_N) = \lim_{N\to\infty} \{1 - \frac{e^{\beta v_j}}{\Phi}\, e^{-\beta x}[1-F(a_N)]\}$$

e, sostituendo dalla (42):

$$\lim_{N\to\infty} F(x-v_j + \frac{1}{\beta}\ln\Phi + a_N) = \lim_{N\to\infty} (1 - \frac{e^{\beta v_j}}{N\Phi}\, e^{-\beta x}). \tag{43}$$

Sostituendo nella (36) il risultato (43), e tenendo conto della definizione (41), si ottiene:

$$\lim_{N\to\infty} G\ (x + \frac{1}{\beta}\ln\Phi + a_N) = \lim_{N\to\infty} (1 - \frac{e^{-\beta x}}{N}).$$

In conclusione:

$$\lim_{N\to\infty} G^N\ (x + \frac{1}{\beta}\ln\Phi + a_N) = \lim_{N\to\infty} (1 - \frac{e^{-\beta x}}{N})^N = \exp(-e^{-\beta x})$$

e ciò stabilisce il risultato (40).

Intuitivamente, il teorema 1 stabilisce che, se è lecito supporre che ogni individuo considera per la scelta un campione di alternative di ampiezza complessiva N sufficientemente grande, la distribuzione dell'utilità associata all'alternativa migliore è approssimativamente:

$$H_N(x) \sim \exp\ [-\ \Phi\ \ e^{-\beta(x-a_N)}] \tag{44}$$

e tale approssimazione è tanto migliore quanto più grande è N. La costante a_N ha il solo effetto di spostare l'origine della scala delle uti_ lità e, pertanto, non influenza il comportamento di scelta. A meno di costanti additive, la media della distribuzione (44) è:

$$V = \frac{1}{\beta} \ln \Phi$$

e ciò è in accordo con la (34).

E' importante notare che il teorema 1, con i risultati che ne conseguono, è stato ottenuto senza alcuna assunzione specifica circa la forma della distribuzione $F(x)$. Piuttosto, è stata assunta una proprietà blanda, la (38), che caratterizza una vasta famiglia di distribuzioni. La (38) è in effetti soddisfatta dalla maggior parte delle distribuzioni più note, e intuitivamente richiede che la coda della distribuzione $F(x)$ sia asintoticamente approssimabile con un esponenziale.

In ogni caso, dal punto di vista dei vincoli che si pone al comportamento individuale, l'assunzione (38) è di generalità paragonabile a quella del principio della massimizzazione dell'entropia o dell'efficienza delle utilità.

A completamento del teorema 1, che stabilisce la forma asintotica della distribuzione delle utilità, si dà un analogo risultato circa la forma asintotica delle probabilità di scelta. Sia:

$p_j(N)$ la probabilità che un individuo, che ha raccolto un campione di ampiezza N (secondo le modalità sopra descritte), scelga un'alternativa di tipo j, $j=1,\dots,n$.

Vale allora il seguente

Teorema 2 (Leonardi).

Sotto le stesse ipotesi del teorema 1:

$$\lim_{N\to\infty} p_j(N) = \frac{w_j e^{\beta v_j}}{\sum_{j=1}^{n} w_j e^{\beta v_j}} \tag{45}$$

Dimostrazione del teorema 2.

Per N qualsiasi, la probabilità di scelta dell'alternativa j è data da:

$$p_j(N) = Nw_j \int_{-\infty}^{\infty} F'(x-v_j)G^{N-1}(x)\,dx. \tag{46}$$

Infatti, se $N-1$ alternative hanno utilità minore di x, il che avviene con probabilità $G^{N-1}(x)$, e la restante alternativa è del tipo j e ha utilità in $(x, x+dx)$, il che avviene con probabilità $w_j F'(x-v_j)dx$, quest'ultima alternativa è l'ottimale. Ciò può accadere in N modi diversi e per tutti i valori di x, da cui la (46).

Si definisca la seguente funzione di $v_1,\dots,v_n$:

$$V_N(v_1,\dots,v_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\, G^N(x), \tag{47}$$

la quale non è altro che l'utilità attesa associata all'alternativa di utilità massima in un campione di ampiezza N. Si constata facilmente che:

$$N\, w_j\, F'(x-v_j)\, G^{N-1}(x) = -\frac{\partial G^N(x)}{\partial v_j} \tag{48}$$

e, pertanto:

$$\begin{aligned} p_j(N) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G^N(x)}{\partial v_j}\,dx = \\ &= -x\,\frac{\partial G^N(x)}{\partial v_j}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\,\frac{\partial G^N(x)}{\partial v_j}. \end{aligned} \tag{49}$$

Dalla (48) segue che il primo termine a destra della (49) è nullo, e, pertanto, la definizione (47) e la (49) implicano la proprietà

$$p_j(N) = \frac{\partial}{\partial v_j} V_n(v_1,\dots,v_n). \tag{50}$$

Cioè, le probabilità di scelta sono le derivate dell'utilità attesa totale rispetto alle utilità deterministiche. Tale proprietà vale per qualunque N, incluso $N\to\infty$.

Poiché, come già visto

$$\lim_{N\to\infty} V_N = V = \frac{1}{\beta} \ln \Phi = \frac{1}{\beta} \ln \sum_j e^{\beta v_j} w_j$$

(a meno di costanti additive indipendenti da $v_1, \ldots, v_n$), si ha:

$$\lim_{N\to\infty} p_j(N) = \frac{\partial V}{\partial v_j} = \frac{w_j e^{\beta v_j}}{\sum_j w_j e^{\beta v_j}}$$

e ciò stabilisce il risultato (45).

Col teorema 2 viene suggerita una corrispondenza completa tra teoria delle utilità casuali e massimizzazione dell'entropia, e, di conseguenza, per via dell'equivalenza dimostrata da Smith (1983b), teoria dell'efficienza delle utilità.

Va notato che la (45) è lievemente più generale della (9), in quanto ciascuna alternativa è ponderata diversamente tramite i pesi w_j. Ciò non costituisce una vera e propria differenza strutturale nei due modelli: qualora si assuma che i w_j siano proporzionali alla numerosità delle alternative di tipo j, cioè:

$$w_j = k\, N_j,$$

in cui

N_j è il numero totale di alternative di tipo j, allora la (9), applicata a tale situazione e conteggiando le alternative in modo corretto, darebbe:

$$T_j = P \frac{N_j e^{\beta v_j}}{\sum_j N_j e^{\beta v_j}} = P \frac{w_j e^{\beta v_j}}{\sum_j w_j e^{\beta v_j}} .$$

Si è ora in grado di stabilire la corrispondenza tra teoria delle utilità casuali e massimizzazione dell'entropia in modo rigoroso.

Si definisca la funzione in $\mathbb{R}^n$

$$F(v) = \frac{1}{\beta} \ln \sum_{j=1}^{n} e^{\beta v_j} w_j , \tag{51}$$

che, come sappiamo, è l'utilità attesa associata ad una scelta ottimale.

La $F(v)$ è una funzione convessa; pertanto, è possibile definire la sua funzione coniugata tramite la trasformata di Legendre:

$$\mathcal{L}(y) = \max_v \{ \sum_j v_j y_j - F(v) \} . \tag{52}$$

Annullando le derivate del termine a destra, si ottiene:

$$y_j = \frac{w_j e^{\beta v_j}}{\sum_j w_j e^{\beta v_j}} \tag{53}$$

e, come si sa, queste non sono altro che le probabilità di scelta. La trasformazione di Legendre stabilisce, pertanto, una dualità tra lo spazio dei vettori v, che sono le utilità deterministiche, e lo spazio dei vettori y, che sono le probabilità di scelta. Dalla (53) si ricava :

$$v_j = \frac{1}{\beta} \left(\ln \frac{y_j}{w_j} + \ln \Phi \right), \quad \Phi = \sum_j w_j e^{\beta v_j}$$

e, sostituendo questo risultato nella (52), si ottiene:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{\beta} \sum_j y_j \ln \frac{y_j}{w_j} + \frac{1}{\beta} \ln \Phi - \frac{1}{\beta} \ln \Phi =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_j y_j \ln \frac{y_j}{w_j} . \tag{54}$$

La funzione:

$$E(y) = \frac{1}{\beta} \sum_j y_j \ln \frac{y_j}{w_j} \tag{55}$$

è chiaramente un'entropia (cambiata di segno). Si è così stabilito che l' entropia è la trasformata di Legendre dell'utilità attesa.

La trasformazione di Legendre è reversibile, cioè è possibile determinare la funzione coniugata della funzione $E(y)$, che è anch'essa convessa:

$$\mathcal{L}^*(v) = \max_y \left\{ \sum_j y_j v_j - \frac{1}{\beta} \sum_j y_j \ln \frac{y_j}{w_j} \right\} . \tag{56}$$

Poiché lo spazio dei vettori y è normalizzato, la massimizzazione nella (56) è soggetta al vincolo:

$$\sum_j y_j = 1. \tag{57}$$

Introducendo un moltiplicatore di Lagrange ν per il vincolo (57) ed eguagliando ad esso le derivate del termine a destra della (56), si ottiene:

$$v_j - \frac{1}{\beta}\left(\ln \frac{y_j}{w_j} + 1\right) = \nu,$$

da cui:

$$y_j = k\, w_j\, e^{\beta v_j}, \quad k = e^{-(1+\beta\nu)}.$$

Infine, eliminando la costante k tramite il vincolo (57), si ha:

$$y_j = \frac{w_j\, e^{\beta v_j}}{\sum_j w_j\, e^{\beta v_j}}, \tag{58}$$

cioè un risultato identico alla (53).

Ponendo

$$\Phi = \sum_j w_j\, e^{\beta v_j}$$

e sostituendo la (58) nella (56), si ottiene:

$$\mathcal{L}^*(v) = \sum_j v_j y_j - \sum_j y_j v_j + \frac{1}{\beta}\ln \Phi =$$

$$= \frac{1}{\beta}\ln \Phi = \frac{1}{\beta}\ln \sum_j w_j e^{\beta v_j} = F(v). \tag{59}$$

Cioè, la trasformata di Legendre della funzione entropia $E(y)$ è l'utilità attesa $F(v)$.

Si è così stabilito il seguente:

Teorema 3 (Leonardi).

Le funzioni $F(v)$ (utilità attesa) ed $E(y)$ (entropia) sopra definite sono reciprocamente coniugate nella dualità indotta dalla trasformazione di Legendre. I due spazi posti in dualità sono lo spazio delle utilità deterministiche v,

$v \in \mathbb{R}^n$,

e lo spazio delle probabilità di scelta y,

$y \in S$,

in cui

$$S = \{ x : x \in \mathbb{R}^n, \ \sum_j x_j = 1 \} .$$

Il risultato del teorema 3 si riferisce al comportamento di un singolo individuo. Esso può, tuttavia, essere esteso senza difficoltà al caso di P individui. In tal caso, le probabilità di scelta verrebbero sostituite dai flussi, cioè dalla distribuzione dei P individui tra le varie alternative, semplicemente moltiplicando P per y. Si ha così che il comportamento di scelta ha due rappresentazioni alternative, completamente equivalenti: una rappresentazione nello spazio delle utilità, tramite la funzione $F(v)$ di utilità attesa, corrispondente alla teoria delle utilità casuali, ed una rappresentazione nello spazio dei flussi, tramite la funzione entropia $E(y)$, corrispondente al principio della massimizzazione dell'entropia.

5. Conclusioni

L'equivalenza tra i tre approcci diversi alla modellazione del comportamento di scelta con dispersione probabilistica è stata dimostrata facendo riferimento ad un esempio molto semplice, che può essere considerato il prototipo base di tutti i modelli di scelta in cui il comportamento individuale è indipendente da quello degli altri individui. Casi più complessi possono essere immaginati, in cui fattori quali il numero limitato di alternative, o la capacità limitata, o l'affollamento eccessivo, inducono effetti di disturbo reciproco, di inibizione e di competizione tra i vari individui. In tali casi, le scelte sono soggette a vincoli ulteriori, e in generale l'utilità di ciascuna alternativa dipende dalla numerosità degli individui che la scelgono. In altre parole, è necessario introdurre segnali di scarsità endogeni, sotto forma di esternalità negative o prezzi.

Un'analisi comparata sui diversi approcci all'introduzione di tali segnali è oggetto di un punto apposito in Bertuglia et al. (1983).

Un'ultima nota concerne la relazione tra il principio delle utilità casuali e la massimizzazione dell'utilità deterministica. Appare ovvio che quest'ultima è deducibile come caso limite dalla prima, qualora si elimini la condizione di eterogeneità della popolazione.

Più precisamente, è stato dimostrato da Evans (1973) che un modello del tipo (9), o (19), o (45), coincide col modello di scelta deterministico quando il parametro β tende all'infinito. Poiché, secondo l'interpretazione della teoria delle utilità casuali, β è inversamente proporzionale alla varianza della distribuzione (28), tale caso limite coincide appunto con quello in cui la distribuzione dei termini casuali dell'utilità degenera in una concentrazione su un unico valore, cioè l'eterogeneità della popolazione scompare.

Ciò può essere dimostrato in generale, anche senza assumere per la distribuzione la forma specifica (28). Si supponga che la distribuzione $F(x)$ degeneri in una concentrazione su un dato valore a, cioè:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases} \tag{60}$$

In tal caso, la corrispondente densità sarà:

$$F'(x) = \delta(x-a) \tag{61}$$

ove $\delta(x-a)$ è una delta di Dirac concentrata sul valore a.

Sostituendo le (60) e (61) nella (27) e notando che:

$$\prod_{k\neq j} F(x-v_k-a) = \begin{cases} 0, & x \leq \max\limits_{k\neq j} (v_k+a) \\ 1, & x > \max\limits_{k\neq j} (v_k+a) \end{cases}$$

si ottiene:

$$P_j = \int_{\max\limits_{k\neq j} (v_k+a)}^{\infty} \delta(x-v_j-a)\, dx = \begin{cases} 1, \text{ se } v_j > \max\limits_{k\neq j} v_k \\ 0, \text{ se } v_j < \max\limits_{k\neq j} v_k \end{cases} \tag{62}$$

cioè, la scelta si concentra sull'alternativa di utilità massima, che è precisamente il principio neoclassico di massimizzazione dell'utilità deterministica.

Riferimenti bibliografici

Beckmann M.J. (1983) The Economic Activity Equilibrium Approach in Location Theory, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l'Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

Ben-Akiva M., Lerman S.R. (1979) Disaggregate Travel and Mobility Choice Models and Measures of Accessibility, in Hensher D., Stopher P. (eds.) *Behavioural Travel Modeling,* Croom Helm, London, 654-679.

Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (1983) Interrelazioni tra Localizzazioni e Trasporti: Stato dell'Arte, Proposte per un Quadro di Riferimento Unificante e Possibili Linee di Sviluppo Futuro, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l'Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

Colorni A. (1983) Il contributo della Ricerca Operativa alle Teorie Localizzative ed allo Studio dell'Interazione Trasporti-Territorio, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l'Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

de Palma A., Lefèvre A. (1983) The Theory of Deterministic and Stochastic Compartmental Models and its Application: the State of the Art, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l'Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

Domencich T., McFadden D. (1975) *Urban Travel Demand: A Behavioral Analysis,* North-Holland, Amsterdam.

Evans S.P. (1973) A Relationship between the Gravity Models for Trip Distribution and the Transportation Problem in Linear Programming, *Transportation Research, 7,* 39-61.

Leonardi G. (1981) The Structure of Random Utility Theory in Building Location Allocation Models, W.P. 81-28, IIASA, Laxenburg, Austria.

Leonardi G. (1982) Transient and Asymptotic Behavior of a Random - Utility Based Stocastic Search Process in Continuous Space and Time, Paper presented at the 3rd Annual Meeting of the Regional Science Association, Italian Section, Venice, November.

Leonardi G. (1983) A Choice-Theoretical Framework for Household Mobility and Extensions, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l' Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

Luce R.D. (1959) *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis,* Wiley, New York.

Manski C.F. (1973) Structure of Random Utility Models, Ph. D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Department of Economics, Cambridge, Mass..

Smith T.E. (1978) A Cost-Efficiency Principle of Spatial Interaction Behavior, *Regional Science and Urban Economics, 8,* 313-337.

Smith T.E. (1983a) A Cost-Efficiency Approach to the Analysis of Congested Spatial Interaction Behavior, *Environment and Planning A, 15,* 435-464.

Smith T.E. (1983b) A Cost-Efficiency Theory of Dispersed Equilibria, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S., Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l'Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

Weibull J.W. (1983) A Dynamic Simulation Model of Disequilibrium in the Housing Market, in Bertuglia C.S., Leonardi G., Occelli S. Rabino G.A., Tadei R. (eds.) *Nuove Teorie e Metodi per l'Analisi delle Relazioni tra Localizzazioni e Trasporti,* IRES, Torino.

Wilson A.G. (1970) *Entropy in Urban and Regional Modelling,* Pion, London.

Wilson A.G. (1974) *Urban and Regional Models in Geography and Planning,* Wiley, Chichester.

WORKING PAPERS

*1 "Un modello urbano a larga scala per l'area metropolitana di Torino", *gennaio 1981*

*2 "Metodologie per la pianificazione dei parchi regionali", *gennaio 1981*

*3 "A Large Scale Model for Turin Metropolitan Area", *maggio 1981*

4 "An Application to the Ticino Valley Park of a Mathematical Model to Analyse the Visitors Behaviour", *luglio 1981*

5 "Applicazione al parco naturale della Valle del Ticino di un modello per l'analisi del comportamento degli utenti: la calibrazione del modello", *settembre 1981*

6 "Applicazione al parco naturale della Valle del Ticino di un modello per l'analisi del comportamento degli utenti: l'uso del modello", *settembre 1981*

*7 "Un'analisi delle relazioni esistenti tra superficie agricola utilizzata ed alcune principali grandezze economiche in un gruppo di aziende agricole piemontesi al 1963 e al 1979", *settembre 1981*

8 "Localizzazione ottimale dei servizi pubblici, con esperimenti sulle scuole dell'area torinese", *settembre 1981*

9 "La calibrazione di un modello a larga scala per l'area metropolitana di Torino", *ottobre 1981*

10 "Applicazione al parco naturale della Valle del Ticino di un modello per l'analisi del comportamento degli utenti: l'individuazione di un indicatore di beneficio per gli utenti ed una analisi di sensitività su alcuni parametri fondamentali", *ottobre 1981*

11 "La pianificazione dell'uso ricreativo di aree naturali: il caso del parco della Valle del Ticino", *novembre 1981*

*12 "The Recreational Planning of Country Parks: the Case Study of the Ticino Valley Park", *marzo 1982*

13 "Alcuni aspetti della calibrazione di un modello dinamico spazializzato: il caso del modello dell'area metropolitana torinese", *settembre 1982*

*14 "L'applicazione di un modello dinamico a larga scala per l'area metropolitana di Torino: la calibrazione", *novembre 1982*

15 "Modello commerciale Piemonte", *novembre 1982*

16 "Resource allocation in multi-level spatial health care systems: benefit maximisation", *dicembre 1982*

17 "Relazione sulla struttura e sulla dinamica del settore elettromeccanico piemontese", *dicembre 1982*

18 "Evoluzione della finanza locale in Piemonte e in Italia 1977 - 1981", *febbraio 1983*

19 "Un metodo per l'analisi di scenari multidimensionali in ordine alle relazioni tra domanda di trasporto e variabili strutturali dei sistemi economici e territoriali", *febbraio 1983*

20 "Modello commerciale Piemonte", *marzo 1983*

21 "Calibrating the residential location submodel of the simulation moder for the Turin metropolitan area", *giugno 1983*

22 "Dinamiche spaziali dell'area metropolitana di Torino negli ultimi tre decenni" , *giugno 1983*

23 "Struttura economica delle imprese del dettaglio alimentare in Piemonte — prime valutazioni", *luglio 1983*

24 "The dynamics of Turin metropolitan area: a model for the analysis of the processes and for the policy evaluation", *agosto 1983*

25 "Un'analisi, con il modello RAMOS, della struttura spaziale del servizio sanitario regionale: il caso del Piemonte", *settembre 1983*

26 "Manuale per l'uso del modello RAMOS (Resource Allocation Model Over Space)", *settembre 1983*

27 "The spatial dynamics of the Turin metropolitan area: an analysis of the last three decades", *ottobre 1983*

28 "Un modello del sistema urbano di Torino: alcune valutazioni di un'esperienza modellistica", *novembre 1983*

29 "Il conto economico dei comparti manifatturieri piemontesi, 1980 — Elaborazioni su dati rilevati dall'ISTAT sul Prodotto Lordo delle imprese manifatturiere con sede sociale in Piemonte", *novembre 1983*

30 "Interrelazioni tra localizzazioni e trasporti: stato dell'arte e possibili linee di sviluppo futuro", *gennaio 1984*

---

* Esaurito

ires ISTITUTO RICERCHE ECONOMICO - SOCIALI DEL PIEMONTE
VIA BOGINO 21 10123 TORINO