e in conseguenza

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M(dx),$$

ovvero

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a).$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx = k\,(b-a),$$

ove k è un numero compreso tra m ed M. D' altra parte, la funzione $f(x)$ essendo continua, esiste un punto x_1 dell'intervallo (a, b) in cui $f(x_1) = k$, per cui si ha in definitiva:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\,(b-a).$$

Questa formola costituisce il così detto *teorema della media*.

Fra gli infiniti modi di scomporre l' intervallo (a, b) per costruire la somma S, il più semplice consiste nella divisione di (a, b) in parti eguali.

Abbiamo allora

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_{n-1} = h_n = h,$$

e quindi

$$S = \sum h_s y_s = \sum h y_s = h\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n),$$

od anche

$$S = nh\,\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n},$$

dalla quale risulta, osservando che $n\,h = b - a$,

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{1}{b-a}\,S.$$

Passando al limite quando n cresce indefinitamente, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

la quale giustifica il nome di *valor medio di* $f(x)$ attribuito all' espressione

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$