§ 2 (*al Capitolo XVI*, § 7).

Formula del valore matematico di un'obbligazione soggetta a rischio.

Denotiamo con p_1 la probabilità di riscuotere la prima rata, a_1, di reddito maturantesi fra un anno, e con p_2 la probabilità di riscuotere la seconda rata di reddito a_2, *purchè sia stata riscossa la rata del primo anno*, ed ancora con p_3 la probabilità di riscuotere a_3 dopo tre anni, *purchè siano state riscosse le due rate precedenti*, e così via per $p_4 \ldots p_n$, in cui n rappresenta il numero degli anni decorrendi fino all'ultimo pagamento. L'alea di riscuotere il primo pagamento è p_1; quindi il « valore matematico » del primo pagamento, quando si maturerà, è $a_1 \, p_1$, il cui valore presente è $\frac{a_1 \, p_1}{1+i}$. Ma l'alea di riscuotere il secondo pagamento non è, evidentemente, p_2, ma $p_1 \, p_2$; perchè uno dei primi principî della teoria delle probabilità è che l'alea di due avvenimenti successivi è il prodotto delle loro probabilità successive. Così, se l'alea che venga *testa* nel giuoco del getto della moneta è $\frac{1}{2}$, l'alea che venga *testa* due volte di seguito, è di $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ossia $\frac{1}{4}$, e l'alea di tre *teste* di seguito è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ossia $\frac{1}{8}$, ecc. Quindi il « valore matematico » della seconda rata a_2, quando si maturerà, è $a_2 \, p_1 \, p_2$, il cui valore presente è $\frac{a_2 \, p_1 \, p_2}{(1+i)^2}$. In modo analogo, il valore matematico presente della terza rata è $\frac{a_3 \, p_1 \, p_2 \, p_3}{(1+i)^3}$. La somma delle espressioni del valore presente così ricavate è il totale del valore matematico presente di quella entità patrimoniale. Se noi chiamiamo V_m questo valore matematico, abbiamo:

$$V_m = \frac{a_1 \, p_1}{1+i} + \frac{a_2 \, p_1 \, p_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3 \, p_1 \, p_2 \, p_3}{(1+i)_3} + \ldots\ldots \frac{a_n \, p_1 \, p_2 \, p_3 \cdots p_n}{(1+i)^n}.$$

Se supponiamo che tutte le probabilità siano uguali, possiamo denotare tutti i p semplicemente con p, e semplificare sostistuendo p^2 a $p_1 \, p_2$ e p^3 a $p_1 \, p_2 \, p_3$, ecc.

Siccome i p rappresentano la probabilità di ricevere le singole rate, è chiaro che l'alea o rischio di non riceverle è la differenza fra essi e l'unità. Questo rischio di mancato pagamento lo denoteremo colla lettera q. Quindi, q_1, $= 1 - p_1$ ecc., ed anche $p_1 = 1 - q_1$, ecc. Se