

Alla risoluzione della (6) procederemo distinguendo i tre possibili casi: I°) $m = n$, II°) $m > n$ e III°) $m < n$.

I°) se $m = n$, la (6) dà per h il valore,

$$(7) \quad h = \frac{x_p x_r - x_q^2}{x_p + x_r - 2 x_q}$$

In questo caso i valori z_p , z_q e z_r sono in progressione aritmetica mentre i valori $x_p \cdot h$, $x_q \cdot h$ e $x_r \cdot h$ sono in progressione geometrica.

II°) e III°) se $m > n$ [$m < n$], la (6), dopo averla divisa per n [per m], diviene,

$$\left(\frac{x_q - h}{x_p - h} \right)^{\frac{m}{n}} = \frac{x_r - h}{x_q - h}, \quad \left[\left(\frac{x_r - h}{x_q - h} \right)^{\frac{n}{m}} = \frac{x_q - h}{x_p - h} \right],$$

dalla quale posto, $\frac{x_q - h}{x_p - h} = y > 1$, $\left[\frac{x_r - h}{x_q - h} = y > 1 \right]$

ed indi $y = t^n$, [$y = t^m$], dopo semplici calcoli ne viene sempre (cioè in entrambi i casi, $m > n$, $m < n$) l'equazione trinomia,

$$(8) \quad f(t) \equiv \alpha t^{m+n} - \beta t^n + \gamma = 0$$

con la limitazione $t \geq \sqrt[n]{\frac{x_q}{x_p}}$, $\left[t \geq \sqrt[m]{\frac{x_z}{x_q}} \right]$ e dove $\alpha = x_q \cdot x_p$

$$\beta = x_r \cdot x_p \quad \text{e} \quad \gamma = x_r - x_q.$$

Nei casi II°) e III°) dunque dobbiamo risolvere sempre la (8), e le limitazioni or ora scritte, per l'incognita t , scendono dal fatto che deve essere $0 \leq h < x_p$ [$0 \leq h < x_q$]

3. - Consideriamo la funzione, $f(t)$, primo membro di (8) per $t \geq 0$.

Si ha, $f(0) = \gamma > 0$, $f(1) = 0$ e $f(t) > 0$ per $t \geq \sqrt[m]{\frac{\beta}{\alpha}}$,

nel mentre che,

$$f'(t) = t^{n-1} [(m+n) \alpha t^m - n \beta]$$

si annulla per $t = 0$, che non interessa, e per $t_1 = \sqrt[m]{\frac{n \beta}{(m+n) \alpha}} > 0$

e però riesce

$$f'(1) = (m+n) \alpha - n \beta.$$

Segue da tutto ciò: condizione necessaria e sufficiente perchè (8)